ESONERO 24/11/21

Corso di Analisi Matematica 1, Laurea Triennale in Matematica

Anno Accademico 2021/22

PROF.SSA R. GHEZZI

Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi.

Esercizio 1

Sia $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + \frac{1}{k}, k \in Z \setminus \{0\}\right\}$. Dimostrare o confutare i seguenti enunciati.

a) $\sup A = \pi$.

b) A non ammette massimo.

c) $\min A = \pi - 1$.

d) A è illimitato.

Esercizio 2

Mettere in ordine di infinito crescente le seguenti successioni

$$a_n = (n^2)!, \quad b_n = n^{n(n-1)}, \quad c_n = \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}.$$

Esercizio 3

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{n^4}) \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^6+n}+\sqrt{n^4+1}-n^3}.$$

Esercizio 4

Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+\beta^2), & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{1-\cos(\alpha x)}{\arctan(x^2)}, & x < 0 \end{cases}$$

risulti continua nel suo dominio.

Esercizio 5

Sia $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una funzione tale che $f(0) = 0$. Supponiamo che esista il $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che, dati $b > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha < \beta < \frac{f(b)}{b}$ allora esiste $c \in]0, b[$ tale che $\frac{f(c)}{c} = \beta$.

Esercizio 6

Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \left(\frac{5 - \sin\left(x - \frac{1}{100}\right)}{7 + \sin x} \right)^x .$$

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.