

**ANALISI MATEMATICA 1**  
**LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA**  
**23 GIUGNO 2022**  
**I APPELLO SESSIONE ESTIVA 2021/22**

**DOCENTE R. GHEZZI**

**CODOCENTE E. CALLEGARI**

PER LO SVOLGIMENTO DELL'ESAME È VIETATO L'USO DI CALCOLATRICI E CELLULARI.  
È AMMESSA INVECE LA CONSULTAZIONE DEI PROPRI APPUNTI DEL CORSO.

TUTTE LE RISPOSTE VANNO ADEGUATAMENTE DIMOSTRATE, EVENTUALMENTE ENUNCIANDO DEI RISULTATI VISTI A LEZIONE.

SI RICORDA CHE PER VERIFICARE UN ASSERTO OCCORRE UNA DIMOSTRAZIONE, MENTRE PER CONFUTARLO BASTA UN CONTROESEMPIO.

**Esercizio 1 [6 punti]**

Si consideri la successione

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_{n+1}},$$

nei tre casi seguenti

$$a_n = n, \quad a_n = e^n, \quad a_n = \sqrt{n}.$$

- In quali casi la successione  $\alpha_n$  converge ad  $e$ ?
- Nei casi individuati al punto precedente, quando la convergenza avviene decrescendo?

**Esercizio 2 [6 punti]**

Data  $a_n = (1 + \sin n)^n$ , calcolare  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$  e  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

**Esercizio 3 [6 punti]**

Dire (giustificando la risposta) se la funzione  $g(x) = x \log x$  è uniformemente continua sugli intervalli  $]0, 1]$  e  $[1, +\infty[$ .

**Esercizio 4 [10 punti]**

Si consideri la funzione

$$f(x) = 2ax - \log(|e^{ax} - 1|),$$

con  $a > 0$  un parametro reale positivo.

- Determinare il dominio e l'immagine di  $f$ . Determinare eventuali asintoti. La funzione è limitata?
- Determinare massimi/minimi e dire se sono relativi o assoluti.
- Determinare l'insieme di continuità e di derivabilità di  $f$ .
- Quanti zeri ha la funzione? Come varia il numero di zeri al variare di  $a$ ?

**GIRARE**

**Esercizio 5 [8 punti]**

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile su  $I$  intervallo. Supponiamo che

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in I.$$

- Dimostrare che per ogni  $x, y \in I$  vale la disuguaglianza  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{2}$ .
- Dimostrare che  $f$  manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.
- Dimostrare che se  $f$  è suriettiva allora  $I$  è illimitato.