

ANALISI MATEMATICA 1
LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
23 GIUGNO 2022
I APPELLO SESSIONE ESTIVA 2021/22

DOCENTE R. GHEZZI

CODOCENTE E. CALLEGARI

PER LO SVOLGIMENTO DELL'ESAME È VIETATO L'USO DI CALCOLATRICI E CELLULARI.
È AMMESSA INVECE LA CONSULTAZIONE DEI PROPRI APPUNTI DEL CORSO.

TUTTE LE RISPOSTE VANNO ADEGUATAMENTE DIMOSTRATE, EVENTUALMENTE ENUNCIANDO DEI RISULTATI VISTI A LEZIONE.

SI RICORDA CHE PER VERIFICARE UN ASSERTO OCCORRE UNA DIMOSTRAZIONE, MENTRE PER CONFUTARLO BASTA UN CONTROESEMPIO.

Esercizio 1 [6 punti]

Si consideri la successione

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_{n+1}},$$

nei tre casi seguenti

$$a_n = n, \quad a_n = e^n, \quad a_n = \sqrt{n}.$$

- In quali casi la successione α_n converge ad e ?
- Nei casi individuati al punto precedente, quando la convergenza avviene decrescendo?

Esercizio 2 [6 punti]

Data $a_n = (1 + \sin n)^n$, calcolare $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Esercizio 3 [6 punti]

Dire (giustificando la risposta) se la funzione $g(x) = x \log x$ è uniformemente continua sugli intervalli $]0, 1]$ e $[1, +\infty[$.

Esercizio 4 [10 punti]

Si consideri la funzione

$$f(x) = 2ax - \log(|e^{ax} - 1|),$$

con $a > 0$ un parametro reale positivo.

- Determinare il dominio e l'immagine di f . Determinare eventuali asintoti. La funzione è limitata?
- Determinare massimi/minimi e dire se sono relativi o assoluti.
- Determinare l'insieme di continuità e di derivabilità di f .
- Quanti zeri ha la funzione? Come varia il numero di zeri al variare di a ?

GIRARE

Esercizio 5 [8 punti]

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I intervallo. Supponiamo che

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in I.$$

- Dimostrare che per ogni $x, y \in I$ vale la disuguaglianza $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{2}$.
- Dimostrare che f manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.
- Dimostrare che se f è suriettiva allora I è illimitato.