ANALISI MATEMATICA 1
Laurea Triennale in Matematica
30 agosto 2022

I Appello sessione autunnale 2021/22

Docente R. Ghezzi — Codocente E. Callegari

Per lo svolgimento dell'esame è vietato l'uso di calcolatrici e cellulari. È ammessa la consultazione dei propri appunti del corso. Tutte le risposte vanno adeguatamente dimostrate, eventualmente enunciando dei risultati visti a lezione. Si ricorda che per verificare un asserto occorre una dimostrazione, mentre per confutarlo basta un controesempio.

Esercizio 1 [9 punti]

Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\cos x}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\sqrt{x+1}} - \sqrt{e^{x+1}}\right).$$

Esercizio 2 [4 punti]

Sia $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

— Determinare la chiusura, l'interno e il derivato di A.

— Dire se esiste una successione di valori di A che non ammette sottosuccessioni convergenti ad un punto di A. In caso affermativo dare un esempio di una tale successione.

Esercizio 3 [6 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

— Dare un esempio di f per cui $f(\mathbb{R})$ sia chiuso e non aperto.

— Dare un esempio di f per cui $f(\mathbb{R})$ sia aperto e non chiuso.

— Dimostrare che $C \subset \mathbb{R}$ limitato implica $f(C)$ limitato.

— Dimostrare che $A \subset \mathbb{R}$ chiuso implica $f^{-1}(A)$ chiuso.

Esercizio 4 [9 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = e^x(x^3 + 2x^2).$$

— Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio, l'immagine di f. La funzione è limitata ?

— Determinare eventuali asintoti, massimi/minimi e dire se sono relativi o assoluti.

— Al variare di λ in $\mathbb{R}$ si dica quante sono e che segno hanno le soluzioni dell'equazione $f(x) - \lambda = 0$.

GIRARE

Esercizio 5 [4 punti]

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(0) = 0, f(1) = 1$ e

$$\forall\, x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leq 2.$$

— Dimostrare che f è limitata.
— Determinare la minima costante $C > 0$ tale che, per ogni $x \in [0,1]$ valga $|f(x)| \leq C$.