

ANALISI MATEMATICA 1
LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
22 SETTEMBRE 2022
II APPELLO SESSIONE AUTUNNALE 2021/22

DOCENTE R. GHEZZI

CODOCENTE E. CALLEGARI

Per lo svolgimento dell'esame è vietato l'uso di calcolatrici e cellulari. È ammessa la consultazione dei propri appunti del corso. Tutte le risposte vanno adeguatamente dimostrate, eventualmente enunciando dei risultati visti a lezione. Si ricorda che per verificare un asserto occorre una dimostrazione, mentre per confutarlo basta un controesempio.

Esercizio 1 [12 punti]

Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos e^n}{\log n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\log n + \cos n + \arccos(1/n)}}{n}$$
$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin(t/2)} \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x - e}{\log x}.$$

Esercizio 2 [4 punti]

Dimostrare che un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ è finito se e solo se A non ha punti di accumulazione in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Esercizio 3 [6 punti]

Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n f(n) = 2$.

Dimostrare che

1. $] -2, 2[\subset f([0, +\infty[)$;
2. esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty[$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ e per ogni n vale $f(x_n) = 0$;
3. se, in aggiunta, f è derivabile su $]0, +\infty[$, allora esiste una successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty[$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ e per ogni n vale $f'(z_n) = 0$.

Esercizio 4 [6 punti]

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, determinare quante (non si chiede di calcolarle!) soluzioni ha l'equazione

$$\log x - \lambda x = 0.$$

(Suggerimento : per ogni valore del parametro λ , studiare la funzione $f_\lambda(x) = \log x - \lambda x$).

Esercizio 5 [4 punti]

Enunciare la formula della derivata della funzione inversa.

Sia $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(s) = \arcsin s + \arccos s$. Calcolare $g'(s)$. Quanto vale $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$? Quanto vale $g\left(\frac{1}{\sqrt{2022}}\right)$?