ESONERO 21/11/22

Corso di Analisi Matematica 1
Laurea Triennale in Matematica
Anno Accademico 2022/23

Docente R. Ghezzi

Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi. È consentito l'uso degli appunti. Non è consentito consultare libri né usare la calcolatrice.

Esercizio 1. Consideriamo l'insieme

$$E = ([-1,0] \cap \mathbb{Q}) \cup \left\{ \frac{n+(-1)^n}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

i) Determinare $\inf E, \sup E$ e, se esistono $\min E, \max E$.

ii) Determinare $\partial E, \mathring{E}, \bar{E}, \mathring{\bar{E}}, \bar{\mathring{\bar{E}}}, \mathring{\bar{\mathring{\bar{E}}}}$.

iii) Esiste un sottoinsieme $A \subset R$ tale che $\mathring{\bar{A}} \neq \mathring{\bar{\mathring{\bar{A}}}}$? Se sì, esibirlo; se no, dimostrare che non esiste.

Esercizio 2. Mettere in ordine crescente di infinito le seguenti successioni

$$a_n = (n+100)^n, \quad b_n = n^{n+1}, \quad c_n = (n+100)!, \quad d_n = (n + \log_2 n)^n.$$

Esercizio 3. La *parte frazionaria* di un numero reale x è definita come la differenza tra x e la sua parte intera $g(x) := x - \lfloor x \rfloor$. Dimostrare che $\liminf_{n\to+\infty} g(\sqrt{n}) = 0$, e che $\limsup_{n\to+\infty} g(\sqrt{n}) = 1$.

Esercizio 4. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} (\sin(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))^2 \log(1+e^n).$$

Esercizio 5. Data $f(x) = \frac{\sin(\sin(\sin x)) + \log(1+x)}{e^x - \cos x}$, calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Esercizio 6. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Definiamo

$$\operatorname{diam} A := \sup\{|x-y| \mid x \in A, y \in A\}.$$

i) Dimostrare che A illimitato implica $\operatorname{diam} A = +\infty$.

ii) Dare un esempio di insieme A limitato per cui valga $|x-y| < \operatorname{diam} A$ per ogni x e y in A.

iii) Sotto l'ipotesi A compatto, dimostrare che esistono $\bar{x} \in A$ e $\bar{y} \in A$ tali che $|\bar{x} - \bar{y}| = \operatorname{diam} A$.