

## ESONERO 23/1/23

CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1  
LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA  
ANNO ACCADEMICO 2022/23

DOCENTE R. GHEZZI

*Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi. È consentito l'uso degli appunti. Non è consentito consultare libri né usare la calcolatrice.*

**Esercizio 1.** Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , considerare  $a_n$  la successione definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{a_n+2}, \\ a_0 = \alpha. \end{cases}$$

Studiare la natura di  $a_n$  nei seguenti casi

$$a) \alpha = 2023; \quad b) \alpha = -\frac{199}{100}; \quad c) \alpha = -\frac{99}{100} - \sqrt{3}.$$

La successione è ben definita per tutti i valori  $\alpha \neq -2$ ?

**Esercizio 2.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione crescente e tale che la funzione  $g(x) = f(x) - x$  sia decrescente. Dire se, necessariamente,  $f$  è

a) continua; b) uniformemente continua; c) lipschitziana.

**Esercizio 3.** Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa. Dimostrare che

- a) se  $f(0) = 0$  e  $f(1) = 1$ , allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;
- b) se  $f(0) = f(1) = 0$ , allora o  $f$  è costante o  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;
- c) se  $f$  è superiormente limitata, allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{x \in [0, +\infty[} f(x)$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f(x) = (\sin(x + x^5))^2 - (\sin x)^2 - 2x^6$ .

- a) Calcolare, al variare di  $\alpha > 0$ , il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ .
- b) Mostrare che l'equazione  $f(x) = -x^{100}$  ha almeno tre soluzioni distinte.