

ESONERO 23/1/23

CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1
LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
ANNO ACCADEMICO 2022/23

DOCENTE R. GHEZZI

Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi. È consentito l'uso degli appunti. Non è consentito consultare libri né usare la calcolatrice.

Esercizio 1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, considerare a_n la successione definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{a_n+2}, \\ a_0 = \alpha. \end{cases}$$

Studiare la natura di a_n nei seguenti casi

$$a) \alpha = 2023; \quad b) \alpha = -\frac{199}{100}; \quad c) \alpha = -\frac{99}{100} - \sqrt{3}.$$

La successione è ben definita per tutti i valori $\alpha \neq -2$?

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e tale che la funzione $g(x) = f(x) - x$ sia decrescente. Dire se, necessariamente, f è

a) continua; b) uniformemente continua; c) lipschitziana.

Esercizio 3. Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che

- a) se $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- b) se $f(0) = f(1) = 0$, allora o f è costante o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;
- c) se f è superiormente limitata, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{x \in [0, +\infty[} f(x)$.

Esercizio 4. Sia $f(x) = (\sin(x + x^5))^2 - (\sin x)^2 - 2x^6$.

- a) Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- b) Mostrare che l'equazione $f(x) = -x^{100}$ ha almeno tre soluzioni distinte.