

ANALISI MATEMATICA 1 A.A. 2022/23

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA  
I APPELLO SESSIONE ESTIVA ANTICIPATA 2022/23  
6 FEBBRAIO 2023

DOCENTE R. GHEZZI, CODOCENTE E. CALLEGARI

*Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi. È consentito l'uso degli appunti. Non è consentito consultare libri né usare la calcolatrice.*

**Esercizio 1.** Considerare la successione  $a_n = \frac{n^3 - 5n + 10}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dimostrare che, per ogni  $n \geq 3$  vale  $a_n \geq 3$ . Determinare estremo superiore e inferiore dell'insieme  $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  e dire se si tratta di massimo e minimo.

**Esercizio 2.** Calcolare, al variare di  $x > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \left( 1 - \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \right).$$

**Esercizio 3.** Data  $f(x) = \log(1 + x^3)$ , dire se  $f$  è uniformemente continua sugli insiemi

$$a) ]0, 1[, \quad b) [0, 1], \quad c) ]-1, 0], \quad d) [0, +\infty[.$$

**Esercizio 4.** Data  $f(x) = 2 \sin(\sin x) - x \cos(x + x^3) - \sin x$ ,

- calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^5}$ ;
- dire, motivando la risposta, quanto vale  $f^5(0)$ ;
- dire se l'equazione  $f(x) = x^6$  ha soluzioni strettamente positive.

**Esercizio 5.**

- Studiare la funzione  $f(x) = \log x + \frac{x}{x-1}$  (dominio, limiti agli estremi del dominio, punti di estremo, segno di  $f$ ) e tracciare un abbozzo del grafico.
- Determinare tutte le eventuali soluzioni dell'equazione  $x \log x + \frac{x^2}{x-1} = 0$ .
- Detta  $g(x) = x \log x + \frac{x^2}{x-1}$ , dire se l'affermazione "dato  $\gamma \in \mathbb{R}$  contenuto nell'intervallo di estremi  $g(1/2)$  e  $g(3/2)$  esiste  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  tale che  $g(\bar{x}) = \gamma$ " è vera o falsa (motivando adeguatamente la risposta).

**Esercizio 6.** Considerare la successione definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \arctan a_n, \\ a_0 = 1999. \end{cases}$$

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n; \quad b) \text{ (facoltativo) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot a_n.$$