ANALISI MATEMATICA 1

Laurea Triennale in Matematica
I Appello sessione estiva a.a. 2022/23
15 giugno 2023

Docente R. Ghezzi, Codocente E. Callegari

Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi. È consentito l'uso degli appunti. Non è consentito consultare libri né usare la calcolatrice.

Esercizio 1 [3pt]

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sin\left(\log(n+1)-\log n\right)\right)$$

Esercizio 2 [10pt]

Sia $\alpha \in [-1,1]$ un parametro reale. Considerare la successione definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2+1-\alpha), \\ a_0 = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

a) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di α [5pt].
b) Dire per quali valori del parametro α esiste ed è finito il $\lim_{n\to+\infty} a_n$ [3pt].
c) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$ al variare di α [2pt].

Esercizio 3 [4pt]

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua e $K\subset\mathbb{R}$ un sottoinsieme compatto e $A\subset\mathbb{R}$ un sottoinsieme aperto. Dimostrare che $f(K)$ è compatto e $f^{-1}(A)$ è aperto.

Esercizio 4 [12pt]

Sia $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Studiare la continuità di φ [2 pt].
b) Dire se i seguenti insiemi sono compatti, giustificando la risposta :

$$\begin{aligned} A &= \{\varphi(x) \mid x \in [-27,27]\}; \\ B &= \{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{27} < \varphi(x) < 1\}; \\ C &= \{x\in\mathbb{R} \mid x \geq 1, \varphi(x) = (\sin(1/x))^2\}. \end{aligned}$$

[2pt,5pt,5pt]

GIRARE

(Si usi l'enunciato l'enunciato dell'esercizio 3).

Esercizio 5 [8pt]

Sia $h(x) = (|x|^{3/4} - 1)e^{\frac{x}{1-x^2}}$. Studiare la continuità uniforme di h sui seguenti insiemi

$$]0, 1[, \quad] - 1, 1/2], \quad]\sqrt{2}, 100[, \quad [100, +\infty[.$$

(Si studi prima la continuità di h sul proprio dominio).