ANALISI MATEMATICA 1

Laurea Triennale in Matematica
II Appello sessione estiva a.a. 2022/23
5 luglio 2023

Docente R. Ghezzi, Codocente E. Callegari

Tutte le risposte vanno giustificate. Per confutare un enunciato basta esibire un controesempio, cioè un oggetto che soddisfi tutte le ipotesi ma non soddisfi la tesi. È consentito l'uso degli appunti. Non è consentito consultare libri né usare la calcolatrice.

Esercizio 1 [3+3pti]
Sia $a_n = \{\frac{n}{3}\} + 1/n$, dove $\{x\}$ denota la parte decimale del numero reale x. Calcolare $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ e $\limsup_{n\to+\infty} a_n$.
Detta $b_n = a_n + (-1)^n$, si calcolino tutti i possibili limiti di sottosuccessioni di b_n.

Esercizio 2 [3+4+3pti]
Si consideri la funzione

$$\varphi(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}, x \geq 0,$$

e, dato $a_0 \geq 0$, si definisca la successione a_n attraverso la ricorrenza $a_{n+1} = \varphi(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Si risolvano le disequazioni $\varphi(x) \leq x$ e $\varphi(x) \geq 1$, sulla semiretta $x \geq 0$.
2. Si studi la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al variare del dato iniziale $a_0 \in [0, +\infty[$.
3. Si mostri che esiste (finito o infinito) e si calcoli il valore di $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$ al variare del dato iniziale $a_0 \in [0, +\infty[$.

Esercizio 3 [2+2+4pti] Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che

$$\forall\, x \geq 1, \quad |f(x) - \sin x| \leq \frac{1}{x}.$$

Si dimostri che
a) f è limitata;
b) non esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
c) l'equazione $f(x) = 0$ ha infinite soluzioni.

Esercizio 4 [6pti] Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 10 in $x_0 = 0$ della funzione $h(x) = (\cos(x^4))^{3/2}$. In particolare, quanto vale $h^{(8)}(0)$? (Non è richiesto il calcolo esplicito delle derivate di h).

Esercizio 5 [2+2+2pti] Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si dica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa giustificando la risposta.

1. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha sempre minimo assoluto.
2. Se $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha minimo assoluto.
3. Non è possibile che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.