

# Analisi Matematica 1 - Lista n. 3

## Quesiti elementari sulle funzioni.

Titolo nota

[www.problemisvolti.it](http://www.problemisvolti.it)

Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare gli insiemi indicati a fianco:

1)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  Trovare:  $f(0)$ ,  $f^{-1}(0)$ ,  $f^{-1}([0, 2])$ ,  $f^{-1}(f(4))$

2)  $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$  Trovare:  $f^{-1}(0)$ ,  $f^{-1}(1)$

3)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$  Trovare:  $f^{-1}((0, 1])$ ,  $f^{-1}((-\infty, 0))$

In ciascuno dei casi seguenti dire se  $f$  è iniettiva e/o suriettiva:

4)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x$

5)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $x \mapsto 2x$

6)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $x \mapsto 2x$

7)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x$

8)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

9)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $x \mapsto x^2$

10)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

11)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $x \mapsto x^2$

12)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$   
 $x \mapsto x^2$

13)  $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$   
 $x \mapsto x^2$

Nei seguenti casi calcolare  $f \circ g$  e  $g \circ f$ :

14)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x+1$

15)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$

16)  $f(x) = x^4$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$

17)  $f(x) = x^6$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x}$

18)  $f(x) = e^{x+1}$ ,  $g(x) = \ln x$

19)  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = \ln(x+1)$

Di ciascuna delle seguenti funzioni dire se *pari*, *dispari*, *crescente*, *decrecente* e/o *periodica*:

20)  $f(x) = x^3 + x$

21)  $f(x) = x^4 - x^2$

22)  $f(x) = x^3 + x^2$

23)  $f(x) = \sin^2 x$

24)  $f(x) = \sin(x^2)$

25)  $f(x) = \tan(x^3)$

26)  $f(x) = \sin(e^x)$

27)  $f(x) = e^{\sin x}$

28)  $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

29)  $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + e^{-x}}}$

30)  $f(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$

31)  $f(x) = 2x - 2\lfloor x \rfloor$

32)  $f(x) = 2x + \lfloor 2x \rfloor$

33)  $f(x) = 2|x| + \lfloor 2|x| \rfloor$

34)  $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

35)  $\sqrt{\arctan \frac{1}{x}}$

36)  $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

37)  $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$  (con  $0 < x \leq 1$ )

Trovare i domini delle seguenti funzioni:

38)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

39)  $f(x) = \ln(x^5 - x^3)$

40)  $f(x) = \sqrt{\ln \frac{1}{x^2 - 4x + 4}}$

41)  $f(x) = \sqrt{\ln(\ln(\ln x))}$

$$42) f(x) = \sqrt{|x| - x^2}$$

$$43) f(x) = \sqrt{1 - x - \sqrt{x+1}}$$

$$44) f(x) = \ln(\sqrt{24 - 3x^2 + 12x} - 3x)$$

$$45) f(x) = \sqrt{2 \sin 2x + 1} + \ln\left(\cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$46) f(x) = \frac{1}{1 + \cos(x^2)}$$

$$47) f(x) = \frac{1}{\tan(\pi \sin x)}$$

Nei seguenti casi dire se  $f$  è invertibile e, in caso affermativo, determinare  $f^{-1}$ :

$$48) f: [0, 2] \rightarrow [0, 4] \\ x \mapsto x^2$$

$$49) f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto x^2$$

$$50) f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\} \\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$51) f: \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right] \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \sin x$$

$$52) f: \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right] \rightarrow [-1, 0] \\ x \mapsto \cos x$$

$$53) f: \left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x$$

Operando opportune trasformazioni sui grafici di funzioni già note (cioè  $x^2$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $2^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\tan x$ ) disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

$$54) f(x) = (x-1)^2 + 1$$

$$55) f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$56) f(x) = |x^2 - 1|$$

$$57) f(x) = x^2 - 6|x| + 8$$

$$58) f(x) = |( |x| - 1 )^2 - 1|$$

$$59) f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$60) f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$$

$$61) f(x) = \frac{1}{|x|+1}$$

$$62) f(x) = \left| 2 + \frac{1}{x+1} \right|$$

$$63) f(x) = 2^{|x|}$$

$$64) f(x) = |2^x - 1|$$

$$65) f(x) = |2^{|x|} - 2|$$

$$66) f(x) = |2^{|x|-1} - 4|$$

$$67) f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$68) f(x) = \tan \frac{x + \pi}{2}$$

$$69) f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$$

70) Spiegare come costruire il generico grafico di  $g(x) = \frac{Ax+B}{Cx+D}$  a partire da quello di  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

71) Trovare  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che l'insieme di tutti i suoi periodi sia  $\{q\sqrt{2} \mid q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$ .

72) Esiste una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , non costante, ma avente come periodi sia 1 che  $\sqrt{2}$ ? Se si trovarla, se no dimostrare che non esiste.

73) Esiste una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , non costante, ma avente come periodi tutti gli irrazionali positivi? Se si trovarla, se no dimostrare che non esiste.