

Analisi Matematica 1 - Lista n. 14

Calcolo della derivata di una funzione in 1 variabile

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = ((x+1)^3 - 1)^4$

2) $f(x) = \ln^2(x^2)$

3) $f(x) = \arctan \frac{x+2}{2x+1}$

4) $f(x) = e^{e^x}$

5) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}}$

6) $f(x) = \log_2(x^2+1)$

7) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{x^2+x+1}}$

8) $f(x) = \ln \left| \ln \left(\frac{1}{x^2+1} \right) \right|$

9) $f(x) = \log_x(x^2+1)$

10) $f(x) = \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

11) $f(x) = x \arctan x + \ln \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$

12) $f(x) = \arctan(\ln x) + \arctan(\log_x e)$

13) $f(x) = x^x$

14) $f(x) = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$

15) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

16) $f(x) = x^{x^x}$

17) Calcolare la derivata 100-esima di $f(x) = xe^x$.

18) La derivata 100-esima di $f(x) = \tan x$ è della forma $P(\tan x)$ dove P è un opportuno polinomio. Qual è il grado di P ?

19) Conveniamo di indicare con S l'operatore che agisce nel modo seguente:
 $S(f) = f - f'$. Ad esempio $S(\sin x) = \sin x - \cos x$ mentre $S(e^x) = e^x - e^x = 0$.

a) Calcolare $S(S(xe^x))$.

b) Calcolare $S(S(\dots S(x^{50}e^x)\dots))$.
51 volte

c) Qual è il più grande intero n tale che $S(S(\dots S(x^n e^x)\dots)) = 0$?
101 volte

d) Dire come bisogna cambiare S se si vuole che (a), (b) e (c) diano le stesse risposte scrivendo $x^n e^{3x}$ al posto di $x^n e^x$.

Calcolare, se esiste, la derivata per $x=0$, delle seguenti funzioni:

20) $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

21) $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$

22) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

23) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

24) Date $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
calcolare $f'(x)$ e mostrare
che, per $x=0$, $f'(x)$ non è continua.

25) Date $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
mostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

26) Dire, motivando la risposta, se esiste $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ non identicamente nulla tale che $g(x) = 0$ se $|x| \geq 1$.

Delle funzioni seguenti, calcolare la derivata della funzione inversa nel punto y_0 a fianco indicato.

27) $f(x) = x + e^x$ $y_0 = 1$

28) $f(x) = x + \sin x$ $y_0 = \frac{\pi}{2} + 1$

29) $f(x) = x^7 + x^3 + 8$ $y_0 = 10$

30) $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{2}}$ $y_0 = \frac{3}{2}$