

Calcolo Differenziale

lista **E5**93 problemi assegnati
nelle prove d'esame

Nota. Lo studente ricordi che questi quesiti sono stati assegnati nelle prove d'esame, cioè a fine corso. Ciò significa che potrebbero richiedere anche la conoscenza di argomenti che a questo punto del corso non sono ancora noti. Tuttavia, tutte le volte in cui ciò accade lo segnaleremo con un asterisco (*). Inoltre segnaleremo con un pallino nero (•) tutte le volte che del quesito sia disponibile il video con lo svolgimento.

A.A. 2014/2015

1. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **A**] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x^2) + \ln(1-x^2)) \left(x - \frac{1}{3} \arctan 3x\right) + 3x^7}{x^9}$
2. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **B**] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln^2(1+x) - \ln(1+x^2)) \left(x - \arctan x\right) + \frac{1}{3}x^6}{x^7}$
3. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **C**] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - e^{-3x} - 2 \sin 3x) (\arctan x - \sin x) + 3x^6}{x^8}$
4. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **D**] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x^2} - \cos x) (\sin 4x - 2 \sin 2x) - \frac{4}{3}x^7}{x^9}$
5. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **A**] Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:
$$x^{99} + 1 = 20x.$$
6. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **B**] Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:
$$x^{99} - 1 = \arctan x.$$
7. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **C**] Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:
$$\sqrt[4]{x^4 + 1} = e^x.$$
8. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **D**] Dire, motivando la risposta con uno studio di funzione, quante sono le soluzioni reali dell'equazione:
$$\sqrt[4]{x^4 + 1} = e^{-x}.$$
9. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - file **A, B, C, D**] Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ derivabile 2 volte e tale che, per ogni $x \in \mathbf{R}$ si abbia $|f'''(x)| \leq 4$. Supponiamo inoltre che $f(x)$ sia identicamente nulla per $x \leq 0$. Mostrare che $|f(2)| \leq 8$.
10. [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **A**] Utilizzando un opportuno studio di funzione, dire, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ quante sono le soluzioni dell'equazione:
$$3x^4 - 20x^3 + 24x^2 + \alpha = 2015.$$

11. [6 Febbraio 2015 - I Appello Invernale - fila B] Utilizzando un opportuno studio di funzione, dire, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ quante sono le soluzioni dell'equazione:

$$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + \alpha = 2015.$$

12. [6 Febbraio 2015 - I Appello Invernale - fila C] Utilizzando un opportuno studio di funzione, dire, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ quante sono le soluzioni dell'equazione:

$$3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + \alpha = 2015.$$

13. [6 Febbraio 2015 - I Appello Invernale - fila D] Utilizzando un opportuno studio di funzione, dire, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ quante sono le soluzioni dell'equazione:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + \alpha = 2015.$$

14. [19 Febbraio 2015 - II Appello Invernale - fila A] Sia data $f(x) = \ln(\cos x)$.

- (a) Trovarne lo sviluppo di Taylor di ordine 7 nel punto $x_0 = 0$.
 (b) Usare il risultato del punto (a) per calcolare $f^{(6)}(0)$.

15. [19 Febbraio 2015 - II Appello Invernale - fila B] Sia data $f(x) = e^{1-\cos x}$.

- (a) Trovarne lo sviluppo di Taylor di ordine 7 nel punto $x_0 = 0$.
 (b) Usare il risultato del punto (a) per calcolare $f^{(6)}(0)$.

16. [19 Febbraio 2015 - II Appello Invernale - fila C] Sia data $f(x) = \arctan(\arctan x)$.

- (a) Trovarne lo sviluppo di Taylor di ordine 6 nel punto $x_0 = 0$.
 (b) Usare il risultato del punto (a) per calcolare $f^{(5)}(0)$.

17. [19 Febbraio 2015 - II Appello Invernale - fila D] Sia data $f(x) = \sin(\sin x)$.

- (a) Trovarne lo sviluppo di Taylor di ordine 6 nel punto $x_0 = 0$.
 (b) Usare il risultato del punto (a) per calcolare $f^{(5)}(0)$.

18. [7 Luglio 2015 - I Appello Estivo - fila A] Sia data $f(x) = 1 + \left| \frac{x-1}{x^2-2x+2} \right|$.

- (a) Fare uno studio completo del grafico di f .
 (b) Utilizzando eventualmente il punto (a), dire quante sono, al variare di $\alpha > 0$, le soluzioni positive dell'equazione $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

19. [17 Luglio 2015 - II Appello Estivo - fila A] Sia data $f(x) = \sin^2(x+x^3)$.

- (a) Trovarne lo sviluppo di Taylor di ordine 7 nel punto $x_0 = 0$.
 (b) Usando eventualmente il risultato del punto (a), calcolare $f^{(6)}(0)$.
 (c) Calcolare $g^{(2015)}(0)$, dove $g(x) = x^2 f(x)$.

20. [7 Settembre 2015 - I Appello Autunnale - fila A] Sia data $f(x) = \cos\left(2x + \frac{x^3}{3}\right) - e^{-2x^2}$.

- (a) Trovarne lo sviluppo di Taylor di ordine 7 nel punto $x_0 = 0$.
 (b) Usare il risultato del punto (a) per calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{49x^6}{f(x) + 2x^4}$.

21. [22 Settembre 2015 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Sia data $f(x) = \sqrt{\frac{|x| - 1}{x + 1}}$.

- (a) Fare uno studio completo del grafico di f .
- (b) Utilizzando eventualmente il punto (a), dire quante sono le soluzioni dell'equazione $x^2 = 8f(x)$.

A.A. 2015/2016

22. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - fila **A**] Data la funzione $f(x) = \ln(1 - \sin^2 x) \cdot \sin(x^2) + x^4 + \frac{1}{6} \arctan(x^6)$.

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.

23. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - fila **B**] Data la funzione $f(x) = \ln(1 - \sin^2 x) \cdot \arctan(x^2) + x^4 + \frac{1}{6} \sin(x^6)$.

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.

24. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - fila **C**] Data la funzione $f(x) = \ln(\cos 2x) \cdot \arctan(x^2) + 2x^4 + \frac{4}{3} \sin(x^6)$.

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.

25. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - fila **D**] Data la funzione $f(x) = \ln(\cos 2x) \cdot \sin(x^2) + 2x^4 + \frac{4}{3} \arctan(x^6)$.

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, quanto valgono $f^{(8)}(0)$ e $f^{(9)}(0)$.

26. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - fila **A**] Si consideri l'equazione $x^2(16 - x^2) = \arctan x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- (c) (Facoltativo) Separare le soluzioni, ovvero, per ogni soluzione dell'equazione, esibire un intervallo che contenga lei ma non le altre soluzioni.

27. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - fila **B**] Si consideri l'equazione $x^2(4 - x) = 2 - \arctan x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- (c) (Facoltativo) Separare le soluzioni, ovvero, per ogni soluzione dell'equazione, esibire un intervallo che contenga lei ma non le altre soluzioni.

28. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - fila **C**] Si consideri l'equazione $|x^3 + 1| = 1 + \arctan x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- (c) (Facoltativo) Separare le soluzioni, ovvero, per ogni soluzione dell'equazione, esibire un intervallo che contenga lei ma non le altre soluzioni.

29. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - fila **D**] Si consideri l'equazione $|x^5 - 1| = 1 - \arctan x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- (c) (Facoltativo) Separare le soluzioni, ovvero, per ogni soluzione dell'equazione, esibire un intervallo che contenga lei ma non le altre soluzioni.

30. [30 Gennaio 2016 - **II Esonero** - file **A, B, C, D**] (Facoltativo) Di una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 , sappiamo che esiste una retta che interseca il suo grafico in 3 punti distinti x_1, x_2 e x_3 . Dimostrare che $f''(x)$ si annulla almeno in un punto.

31. [4 Febbraio 2016 - **I App. Inv. e Recupero II Eso.** - fila **A**] Si consideri l'equazione $\frac{4x^2}{x^2 + 1} = \arctan x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.

32. [4 Febbraio 2016 - **I App. Inv. e Recupero II Eso.** - fila **B**] Si consideri l'equazione $\frac{40x}{x^2 + 25} = \arctan x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.

33. [4 Febbraio 2016 - **I App. Inv. e Recupero II Eso.** - fila **C**] Si consideri l'equazione $\frac{4x}{x^2 + 1} = 2^x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.

34. [4 Febbraio 2016 - **I App. Inv. e Recupero II Eso.** - fila **D**] Si consideri l'equazione $\frac{8x^2 + 16}{x^2 + 1} = 15 + e^x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.

35. [4 Febbraio 2016 - **I Appello Inv. e Recupero II Eso.** - file **A, B, C, D**] (Facoltativo) Data $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1 , si considerino le due affermazioni:

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$.

Dire, motivando la risposta, se sono vere o false le implicazioni $(a) \implies (b)$ e $(b) \implies (a)$.

- 36.** [4 Febbraio 2016 - **I Recupero del II Eso.** - fila **A**] Sia data $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x) - \frac{x^4}{12}$.
- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, se per $x = 0$, $f(x)$ abbia un massimo, un minimo o un flesso a tangente orizzontale.
- 37.** [4 Febbraio 2016 - **I Recupero del II Eso.** - fila **B**] Sia data $f(x) = \arctan(\ln(1+x)) - \ln(1+\arctan x) - \frac{x^4}{6}$.
- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, se per $x = 0$, $f(x)$ abbia un massimo, un minimo o un flesso a tangente orizzontale.
- 38.** [4 Febbraio 2016 - **I Recupero del II Eso.** - fila **C**] Sia data $f(x) = \arctan(e^x - 1) - e^{\arctan x} + 1 + \frac{x^4}{6}$.
- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, se per $x = 0$, $f(x)$ abbia un massimo, un minimo o un flesso a tangente orizzontale.
- 39.** [4 Febbraio 2016 - **I Recupero del II Eso.** - fila **D**] Sia data $f(x) = \sin(e^x - 1) - e^{\sin x} + 1 + \frac{x^4}{12}$.
- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
- (b) Dire, motivando la risposta, se per $x = 0$, $f(x)$ abbia un massimo, un minimo o un flesso a tangente orizzontale.
- 40.** [18 Febbraio 2016 - **II App. Inv. e Recupero II Eso.** - fila **A**] Si consideri l'equazione $e^{x^2+x} = \ln(e+x)$.
- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- 41.** [18 Febbraio 2016 - **II Appello Invernale** - fila **B**] Si consideri l'equazione $e^{x^2-x} = \ln(e+x)$.
- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- 42.** [18 Febbraio 2016 - **II Appello Invernale** - fila **C**] Si consideri l'equazione $xe^{x^2-1} = \sin x$.
- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
- 43.** [18 Febbraio 2016 - **II Appello Invernale** - fila **D**] Si consideri l'equazione $xe^{x^2+1} = 10 + \ln x$.
- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
- (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.

44. [18 Febbraio 2016 - **II Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - file **A, B, C, D**] (Facoltativo) Data $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^{10} , si considerino le due affermazioni:

- (a) f è una funzione pari.
 (b) Lo sviluppo di Taylor di ordine 10 nel punto $x_0 = 0$ della funzione f contiene solo potenze pari della x .
 Dire, motivando la risposta, se sono vere o false le implicazioni $(a) \implies (b)$ e $(b) \implies (a)$.

45. [18 Febbraio 2016 - **II Rec.** del **II Eso.** - fila **A**] Sia data $f(x) = (x - \arctan x) \cdot \ln(1 + x^2 + x^3) - \frac{x^5 + x^6}{3}$.

- (a) Dire, al variare di $\alpha > 0$, quanto vale il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.
 (b) Dire, motivando la risposta, se per $x = 0$, $f(x)$ abbia un massimo, un minimo o un flesso a tangente orizzontale.

46. • [21 Giugno 2016 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(\sin x) - 6 \sin x + (\arctan(x + \frac{2}{5}x^3))^3}{x^\beta}$, per $\beta = 3$, $\beta = 5$, e $\beta = 15$.

47. • [21 Giugno 2016 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Si consideri l'equazione $\sqrt{\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{x}} = \frac{3}{2} - x$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro (convessità esclusa).
 (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.
 (c) (facoltativo) Studiare la convessità della funzione al primo membro.

48. • [21 Giugno 2016 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Date $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^2 strettamente convesse, si considerino le due affermazioni:

- (a) $f + g$ è necessariamente una funzione strettamente convessa.
 (b) (facoltativo) fg è necessariamente una funzione almeno debolmente convessa.

Di ciascuna dire se è vera o falsa, motivando ogni risposta positiva con una dimostrazione e ogni risposta negativa con un controesempio.

49. [18 Luglio 2016 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\cos x) + \ln(2 - \cos^2 x) + \sin^2 x^2}{x^\beta}$, per $\beta = 6$, $\beta = 7$, e $\beta = 8$.

50. [18 Luglio 2016 - **II Appello Estivo** - fila **B**] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\cos x) + \ln(1 + \sin^2 x) + 1 - \cos^2 x^2}{x^\beta}$, per $\beta = 6$, $\beta = 7$, e $\beta = 8$.

51. [18 Luglio 2016 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Si consideri l'equazione $\sqrt{x^2(1-x)} = |e^{2x} - 1|$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
 (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.

52. [18 Luglio 2016 - **II Appello Estivo** - fila **B**] Si consideri l'equazione $\sqrt{x^2(1+x)} = |\ln(1+2x)|$.

- (a) Fare uno studio dettagliato della funzione al primo membro.
 (b) Usare lo studio fatto al punto (a) per stabilire quante sono le soluzioni dell'equazione, motivando accuratamente ogni affermazione.

- 53.** [9 Settembre 2016 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Data $f(x) = \ln(1+x+x^3) + \ln(1+x-x^3) - 2\ln(1+x)$
- (a) trovare n intero positivo tale che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ esista finito e non nullo;
- (b) usare il risultato del punto (a) per stabilire se $x = 0$ sia per $f(x)$ un punto di massimo relativo, minimo relativo o flesso.
- 54.** [9 Settembre 2016 - **I Appello Autunnale** - fila **B**] Data $f(x) = 2 \sin x - \sin(x+x^3) - \sin(x-x^3)$
- (a) trovare n intero positivo tale che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ esista finito e non nullo;
- (b) usare il risultato del punto (a) per stabilire se $x = 0$ sia per $f(x)$ un punto di massimo relativo, minimo relativo o flesso.
- 55.** [9 Settembre 2016 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Data $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
- (a) fare uno studio completo del grafico di $f(x)$;
- (b) usare il risultato del punto (a) per studiare il grafico di $g(x) = \left| e^{\sqrt{x+\frac{1}{2}}} - \sqrt{e} \right|$;
- (c) usare il risultato del punto (b) per dire quante sono le soluzioni dell'equazione $g(x) = 10|x| - 1$.
- 56.** [9 Settembre 2016 - **I Appello Autunnale** - fila **B**] Data $f(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x})$
- (a) fare uno studio completo del grafico di $f(x)$;
- (b) usare il risultato del punto (a) per studiare il grafico di $g(x) = \left| \ln(1 + \sqrt[3]{x-1}) \right|$;
- (c) usare il risultato del punto (b) per dire quante sono le soluzioni dell'equazione $g(x) = ||x| - 1|$.
- 57.** [23 Settembre 2016 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Data $f(x) = \sqrt[6]{1+3x^4+3x^6} - \frac{1}{2}(e^{x^4} + e^{x^6})$
- (a) trovare n intero positivo tale che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ esista finito e non nullo;
- (b) usare il risultato del punto (a) per calcolare $f^{(6)}(0)$, $f^{(7)}(0)$ e $f^{(8)}(0)$.
- 58.** [23 Settembre 2016 - **II Appello Autunnale** - fila **B**] Data $f(x) = \sqrt[4]{1-x^4-x^6} - \frac{\cos x^2 + \cos x^3}{2}$
- (a) trovare n intero positivo tale che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ esista finito e non nullo;
- (b) usare il risultato del punto (a) per calcolare $f^{(6)}(0)$, $f^{(7)}(0)$ e $f^{(8)}(0)$.
- 59.** [23 Settembre 2016 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Data $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$,
- (a) fare uno studio completo del grafico di $f(x)$;
- (b) usare il risultato del punto (a) per studiare il grafico di $g(x) = \sqrt[3]{e^{\left|\frac{x}{3}\right|} - 1}$;
- (c) usare il risultato del punto (b) per dire quante sono le soluzioni dell'equazione $g(x) = -x$.
- 60.** [23 Settembre 2016 - **II Appello Autunnale** - fila **B**] Data $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$,
- (a) fare uno studio completo del grafico di $f(x)$;
- (b) usare il risultato del punto (a) per studiare il grafico di $g(x) = \sqrt{1 - \ln(\sqrt{e} - x)} - \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (c) usare il risultato del punto (b) per dire quante sono le soluzioni dell'equazione $g(x) = 3x$.

A.A. 2016/2017

61. [26 Gennaio 2017 - II Esonero - fila A] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \left(\sqrt{1 - \sin^2 x} - e^{x^6} \right) (x - \sin x) + x^5}{x^7 + x^9}$.

62. [26 Gennaio 2017 - II Esonero - fila B] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \left(\sqrt{1 - \sin^2 x} - \cos x^3 \right) (x - \arctan x) + x^5}{x^7 + x^9}$.

63. [26 Gennaio 2017 - II Esonero - fila C] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \left(\sqrt{1 - \sin^2 x} - \cos x^8 \right) (\sin x - \arctan x) + x^5}{x^7 + x^9}$.

64. [26 Gennaio 2017 - II Esonero - fila D] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \left(\sqrt{1 - \sin^2 x} - \sqrt{1 + x^8} \right) (\arctan x - x) - x^5}{x^7 + x^9}$.

65. [26 Gennaio 2017 - II Esonero - fila A] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\sqrt[3]{x^3 + x^6} = 100|1 + x|.$$

66. [26 Gennaio 2017 - II Esonero - fila B] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\sqrt[3]{x^3 - x^6} = 100(1 - x).$$

67. [26 Gennaio 2017 - II Esonero - fila C] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\ln(1 + \sqrt[3]{x}) = e^x - 1.$$

68. [26 Gennaio 2017 - II Esonero - fila D] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\ln(1 - \sqrt[3]{x}) = x^2 - x.$$

69. [7 Febbraio 2017 - I Appello Inv. e Recupero II Eso. - fila A]

Data $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt[3]{1 - x^2} - \cos\left(\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)$, calcolare, al variare di $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.

70. [7 Febbraio 2017 - I Appello Inv. e Recupero II Eso. - fila B]

Data $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt[4]{1 - x^2} - \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$, calcolare, al variare di $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.

71. [7 Febbraio 2017 - I Appello Inv. e Recupero II Eso. - fila C]

Data $f(x) = \sqrt[4]{1 - x^2} \cdot \sqrt[3]{1 - x^2} - \cos\left(\frac{x\sqrt{7}}{\sqrt{6}}\right)$, calcolare, al variare di $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.

72. [7 Febbraio 2017 - I Appello Inv. e Recupero II Eso. - fila D]

Data $f(x) = \sqrt[6]{1 - x^2} \cdot \sqrt[3]{1 - x^2} - \cos x$, calcolare, al variare di $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.

73. [7 Febbraio 2017 - **I Recupero del II Esonero** - fila **A**] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\frac{4\sqrt{x}}{3+x^2} = \ln(ex).$$

74. [7 Febbraio 2017 - **I Recupero del II Esonero** - fila **B**] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\frac{4\sqrt{x}}{2+x^2} = \arctan x.$$

75. [7 Febbraio 2017 - **I Recupero del II Esonero** - fila **C**] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\frac{4\sqrt{x}}{1+x^2} = x^{2017}.$$

76. [7 Febbraio 2017 - **I Recupero del II Esonero** - fila **D**] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$\frac{2\sqrt{x}}{4+x^2} = e^x - 1.$$

77. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv. e Recupero II Eso.** - fila **A**]

Data $f(x) = \left(\ln \sqrt[3]{1-x^3} + x - \arctan x \right) \cdot \left(e^{-2x^2} - \cos(2x) \right)$

- (a) trovarne il polinomio di Taylor di ordine 11 centrato in $x_0 = 0$;
- (b) usare il punto (a) per dire quanto vale $f^{(11)}(0)$.

78. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv. e Recupero II Eso.** - fila **B**]

Data $f(x) = \left(\ln \sqrt[6]{1+x^3} - x + \sin x \right) \cdot \left(e^{x^2} + e^{-x^2} - 2 \right)$

- (a) trovarne il polinomio di Taylor di ordine 11 centrato in $x_0 = 0$;
- (b) usare il punto (a) per dire quanto vale $f^{(11)}(0)$.

79. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv. e Recupero II Eso.** - fila **C**]

Data $f(x) = \left(\ln \sqrt[3]{1+x^3} + x \cos x - \sin x \right) \cdot \left(x^2 - \ln(1+x^2) \right)$

- (a) trovarne il polinomio di Taylor di ordine 11 centrato in $x_0 = 0$;
- (b) usare il punto (a) per dire quanto vale $f^{(11)}(0)$.

80. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv. e Recupero II Eso.** - fila **D**]

Data $f(x) = \left(\ln \sqrt{1-x^3} + x(1-\cos x) \right) \cdot \left(\sin(x^2+x^4) - \sin x^2 \right)$

- (a) trovarne il polinomio di Taylor di ordine 11 centrato in $x_0 = 0$;
- (b) usare il punto (a) per dire quanto vale $f^{(11)}(0)$.

81. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv. e Recupero II Eso.** - file **A, B, C, D**] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = (x-1)^2.$$

- 82.** [4 Luglio 2017 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$xe^{-\frac{1}{x}} = \arctan x.$$

- 83.** [4 Luglio 2017 - **I Appello Estivo** - fila **B**] Dopo aver fatto uno studio completo della funzione al primo membro, dire quante sono le soluzioni reali dell'equazione:

$$x^2 e^{\frac{1}{x}} = -\sin x.$$

- 84.** •[19 Luglio 2017 - **II Appello Estivo** - fila **A**]

Calcolare, sia per $\alpha = 5$ che per $\alpha = 6$, il limite:
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x+x^2) + \ln(1-(\arctan x)^3)}{x^\alpha}.$$

- 85.** [19 Luglio 2017 - **II Appello Estivo** - fila **B**]

Calcolare, sia per $\alpha = 5$ che per $\alpha = 6$, il limite:
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + \ln(1+x+x^2) + \ln(1+(\sin x)^3)}{x^\alpha}.$$

- 86.** [19 Luglio 2017 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Sia data la funzione $f(x) = \frac{e^{-3x} - e^x}{e^{-3x} + e^x}.$

- (a) Fare uno studio completo del grafico di $f(x)$.
 (b) Dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.
 (c) Dire per quali $m \in \mathbf{R}$, esiste una retta di pendenza m che interseca il grafico di $f(x)$ in 3 punti.

- 87.** [19 Luglio 2017 - **II Appello Estivo** - fila **B**] Sia data la funzione $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-x}}{e^{2x} + e^{-x}}.$

- (a) Fare uno studio completo del grafico di $f(x)$.
 (b) Dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.
 (c) Dire per quali $m \in \mathbf{R}$, esiste una retta di pendenza m che interseca il grafico di $f(x)$ in 3 punti.

- 88.** •[1 Settembre 2017 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x+x^4) - \arctan x - x^4}{x^\alpha}.$
 (b) (facoltativo) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x+x^{2017}) - \arctan x - x^{2017}}{x^\alpha}.$

- 89.** [1 Settembre 2017 - **I Appello Autunnale** - fila **B**] Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, i seguenti limiti:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x+x^4) - \sin x - x^4}{x^\alpha}.$
 (b) (facoltativo) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x+x^{2017}) - \sin x - x^{2017}}{x^\alpha}.$

- 90.** [1 Settembre 2017 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{|x| \cdot (1+x^2)}.$

- (a) Fare uno studio dettagliato di $f(x)$ e disegnarne il grafico.
 (b) Stabilire, motivando la risposta, quale sia il massimo numero di punti in cui una retta può intersecare il grafico di $f(x)$.

91. [1 Settembre 2017 - **I Appello Autunnale** - fila **B**] Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{|x^3 + x|}$.

- (a) Fare uno studio dettagliato di $f(x)$ e disegnarne il grafico.
- (b) Stabilire, motivando la risposta, quale sia il massimo numero di punti in cui una retta può intersecare il grafico di $f(x)$.

92. [15 Settembre 2017 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Si considerino le funzioni $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+1)$

e $g(x) = \sqrt{x} + \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$.

- (a) Fare uno studio dettagliato di $f(x)$ e disegnarne il grafico.
- (b) Usando eventualmente il punto (a), fare uno studio dettagliato di $g(x)$ e disegnarne il grafico.

93. [15 Settembre 2017 - **II Appello Autunnale** - fila **B**] Si considerino le funzioni $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

e $g(x) = \sqrt{x} + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$.

- (a) Fare uno studio dettagliato di $f(x)$ e disegnarne il grafico.
- (b) Usando eventualmente il punto (a), fare uno studio dettagliato di $g(x)$ e disegnarne il grafico.