

# Analisi Matematica 1 - Lista n. 25

## Calcolo di Integrali Impropri

Titolo nota

[www.problemisvolti.it](http://www.problemisvolti.it)

Calcolare i seguenti integrali impropri:

1)  $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$

2)  $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx = 6$

3)  $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x(\sqrt{2} + \ln x)} \, dx = +\infty$

4)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = +\infty$

5)  $\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt[3]{x}} \, dx = 6$

6)  $\int_{-1}^0 \ln\left(\frac{1}{x^8}\right) \, dx = 8$

7)  $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin x \ln(\cos x) \, dx = 1$

8)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\pi} \arctan x} \, dx = \sqrt{2}$

9)  $\int_{81}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} \, dx = 2 \ln 2$

10)  $\int_e^{+\infty} \frac{e^{\frac{2x}{x}}}{x^2} \, dx = e^2 - e$

11)  $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{x^2 \cos\left(\frac{\pi}{6x}\right)} \, dx = 3 \ln 3$

12)  $\int_{-2}^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}}\right) \, dx = 1 - 2 \ln 2$

Rispondere, motivando la risposta, alle seguenti domande:

13) Dopo aver calcolato i seguenti limiti: (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{3n} \frac{1}{x} \, dx$ , (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{x} \, dx$  e (c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+\sqrt{n}} \frac{1}{x} \, dx$ ; trovare  $(a_n)$  e  $(b_n)$  che tendano a  $+\infty$  e tali che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x} \, dx = 51$$

[BASTA CHE  $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow e^{51}$   
AD ESEMPIO:  $\begin{cases} a_n = n \\ b_n = e^{51} \cdot n \end{cases}$

14) Come succede nel problema (13) se la funzione integranda è  $\frac{1}{x^2}$  invece che  $\frac{1}{x}$ ?  
[RISPOSTA: SUCCEDE CHE, COMUNQUE SI PRENDANO  $(a_n)$  E  $(b_n)$  TALI CHE  $a_n \rightarrow +\infty$  E  $b_n \rightarrow +\infty$ , SI HA  $\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^2} \, dx \rightarrow 0$ ]

15) Dire quali sono le  $f \in C([0, +\infty))$  tali che, comunque si prenda  $\lambda \in \mathbb{R}$ , è sempre possibile trovare due successioni  $(a_n)$  e  $(b_n)$  che tendano a  $+\infty$  e tali che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx = \lambda$ .  
[RISPOSTA: SONO TUTTE E SOLE QUELLE  $f(x)$  CHE HANNO UNA PRIMITIVA  $F(x)$  NON LIMITATA]