

Analisi Matematica (II modulo) - Exe. 1

Titolo nota

4 marzo 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRALE DI RIEMANN - PROPRIETÀ ELEMENTARI

P.1 CALCOLARE $\mathcal{I}(f, \mathcal{P})$ E $S(f, \mathcal{P})$ NEI CASI SEGUENTI:

(a) $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ SU $[-1, 1]$ CON $\mathcal{P} = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

(b) COME (a) MA CON $f(x) = \chi_{(0,1]}(x)$

(c) $f(x) = x$ SU $[0, 1]$ CON $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\}$

(d) COME (c) MA CON $f(x) = e^x$

P.2 NEI CASI SEGUENTI STABILIRE SE f È $\mathbb{Q}$ -INTEGRABILE NELL'INTERVALLO INDICATO A FIANCO:

(a) $f(x) = x^2$ SU $[0, 1]$

(b) $f(x) = e^x$ SU $[0, 1]$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{SE } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{SE } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ SU $[-1, 1]$

(d) $f(x) = \chi_A(x)$ SU $[0, 1]$ DOVE $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ ED } m \leq 2^n \right\}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[\frac{1}{x}]} & \text{SE } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$ SU $[0, 1]$, DOVE $[...] \text{ SIGNIFICA "PARTE INTERA DI"}$

P.3 USANDO SOLO LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN CALCOLARE I SEGUENTI INTEGRALI:

(a) $\int_0^1 x^2 dx$ $\left[\text{PUÒ ESSERE UTILE RICORDARE LA FORMULA} \right]$
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\int_0^1 e^x dx$

(c) $\int_0^1 x^3 dx$ $\left[\text{PUÒ ESSERE UTILE RICORDARE LA FORMULA} \right]$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

P.4 (a) DATA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, LIMITATA, MOSTRARE CHE SE C'E UNA COSTANTE $\lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE L'INSIEME $\{x \in [a, b] \mid f(x) > \lambda\}$ È FINITO, ALLORA $\int_{[a, b]} f \leq \lambda \cdot (b-a)$

(b) UTILIZZANDO, SE SI VUOLE, IL PUNTO (a), MOSTRARE CHE È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU $[0, 1]$ LA FUNZIONE:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{SE } x = \frac{m}{n} \text{ CON } m, n \text{ INTERI POSITIVI COPRIMI} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

P.5 DIRE SE APPARTIENE A $\mathcal{R}([0, 1])$ LA FUNZIONE:

$$g(x) = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \cdot \frac{-1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor^2} & \text{SE } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SOLUZIONI

$$P1(a) \quad \Delta(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$P1(b) \quad \Delta(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$P1(c) \quad \Delta(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10} - \frac{i-1}{10} \right) \cdot \inf_{x \in [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]} x =$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \frac{(i-1)}{10} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{10} (i-1) = \frac{1}{100} \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = \frac{9}{20}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10} - \frac{i-1}{10} \right) \cdot \sup_{x \in [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]} x =$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \frac{i}{10} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{10} i = \frac{1}{100} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = \frac{11}{20}$$

$$P1(d) \quad \Delta(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10} - \frac{i-1}{10} \right) \cdot \inf_{x \in [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]} e^x =$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{i-1}{10}} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 \left(e^{\frac{1}{10}} \right)^k =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{e^{\frac{10}{10}} - 1}{e^{\frac{1}{10}} - 1} = \frac{e - 1}{\frac{e^{\frac{1}{10}} - 1}{\frac{1}{10}}}$$

$$\begin{aligned}
 S(f, P) &= \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10} - \frac{i-1}{10} \right) \cdot \sup_{x \in [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10})} e^x = \\
 &= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{i}{10}} = \frac{e^{\frac{1}{10}}}{10} \sum_{k=0}^9 \left(e^{\frac{1}{10}} \right)^k = \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{10}}}{10} \cdot \frac{e^{\frac{10}{10}} - 1}{e^{\frac{1}{10}} - 1} = e^{\frac{1}{10}} \cdot \frac{e - 1}{\frac{e^{\frac{1}{10}} - 1}{\frac{1}{10}}}
 \end{aligned}$$

P2(a) BASTA OSSERVARE CHE $f(x) = x^2$ È CONTINUA SU $[0,1]$ E QUINDI È $\mathbb{R}$ -INTEGRABILE

P2(b) BASTA OSSERVARE CHE $f(x) = e^x$ È CONTINUA SU $[0,1]$ E QUINDI È $\mathbb{R}$ -INTEGRABILE

P2(c) PER OGNI $\varepsilon > 0$ SI PRENDA $c = \frac{\varepsilon}{4}$, POI SI PRENDA P' PARTIZIONE DI $[c, 1]$ TALE CHE $S(f, P') - \underline{s}(f, P') < \frac{\varepsilon}{2}$ (SI PUÒ FARE PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([c, 1])$ IN QUANTO È CONTINUA SU $[c, 1]$).

SIA ORA P LA PARTIZIONE DI $[-1, 1]$ DATA DA $P = \{-1, 0\} \cup P'$. SI HA:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \underline{s}(f, P) &= (0 - (-1)) \cdot \inf_{x \in [-1, 0]} f(x) + (c - 0) \cdot \inf_{x \in [0, c]} f(x) + \underline{s}(f, P') = \\
 &= 1 \cdot 0 + \frac{\varepsilon}{4} \cdot (-1) + \underline{s}(f, P')
 \end{aligned}$$

ANALOGAMENTE SI HA:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad S(f, P) &= (0 - (-1)) \cdot \sup_{x \in [-1, 0]} f(x) + (c - 0) \cdot \sup_{x \in [0, c]} f(x) + S(f, P') = \\
 &= 1 \cdot 0 + \frac{\varepsilon}{4} \cdot 1 + S(f, P')
 \end{aligned}$$

QUINDI, SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO (2) E (1), SI OTTIENE:

$$S(f, P) - \tau(f, P) = \frac{\varepsilon}{2} + S(f, P') - \tau(f, P') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ABBIAMO QUINDI VERIFICATO CHE, COMUNQUE SI SCELGA $\varepsilon > 0$,
È POSSIBILE COSTRUIRE UNA PARTIZIONE P DI $[-1, 1]$ PER LA
QUALE SI ABBA $S(f, P) - \tau(f, P) < \varepsilon$.
QUESTO DIMOSTRA CHE $f \in \mathcal{R}([-1, 1])$.

CON UN PROCEDIMENTO ANALOGO
SI DIMOSTRA CHE SE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
È LIMITATA ED HA UN SOLO PUNTO
DI DISCONTINUITÀ ALLORA $f \in \mathcal{R}([a, b])$

P2(d) L'INSIEME A È DENSO IN $[0, 1]$. INFATTI, COMUNQUE SI PRENDA
UN INTERVALLINO $(a, b) \subset [0, 1]$, BASTA SCEGLIERE $m_0 \in \mathbb{N}$ IN MODO CHE

$$(3) \quad \frac{1}{2^{m_0}} < b - a$$

POI PRENDERE IL PIÙ PICCOLO $k_0 \in \mathbb{N}$ PER IL QUALE

$$\frac{k_0}{2^{m_0}} > a$$

IL NUMERO $\frac{k_0}{2^{m_0}}$ STA NECESSARIAMENTE IN (a, b) PERCHÉ ALTREMENTI,
SE FOSSE ANCHE MAGGIORE O UGUALE A b , SI AVREBBE:

$$\frac{k_0}{2^{m_0}} - \frac{k_0 - 1}{2^{m_0}} \geq b - a$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{2^{m_0}} \geq b - a$$

IN CONTRADDIZIONE CON (3).

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE, COMUNQUE SI SCELGA $(a, b) \subset [0, 1]$
ESISTE UN ELEMENTO DI A CHE STA IN (a, b) . QUINDI A È DENSO IN $[0, 1]$.
IL FATTO CHE ANCHE IL COMPLEMENTARE DI A SIA DENSO IN $[0, 1]$ SEGUE
SUBITO DAL FATTO CHE A È NUMERABILE.

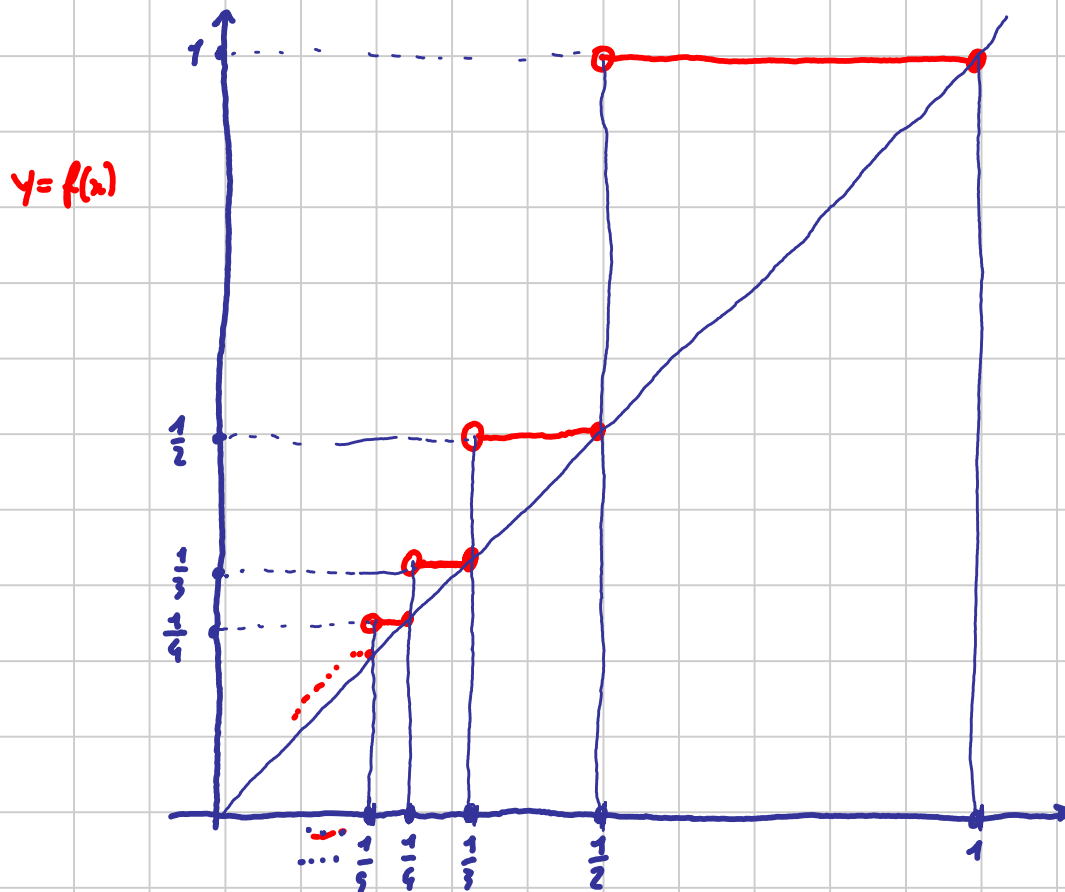
A QUESTO PUNTO, COME FATTO A LEZIONE PER LA FUNZIONE DI DIRICHLET, DAL FATTO CHE A È DENSO IN $[0,1]$ SEGUE CHE $\int_{[0,1]}^+ \chi_A = 1$, MENTRE DAL FATTO CHE È DENSO IL SUO COMPLEMENTARE SEGUE CHE $\int_{[0,1]}^- \bar{\chi}_A = 0$.
 QUINDI $\chi_A \notin \mathcal{R}([0,1])$.

P2(e) PER MOSTRARE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$ BASTA VERIFICARE CHE f È CRESCENTE.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{x} < n+1 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n$$

CIÒ SIGNIFICA CHE, PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SULL'INTERVALLO $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ LA FUNZIONE VALE $\frac{1}{n}$. QUINDI IL SUO GRAFICO È IL SEGUENTE:



DAL FATTO CHE f È CRESCENTE DEDUCIAMO CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$

P3(a) PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA $\mathcal{O}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

POICHÉ $f(x) = x^2$ SI HA:

$$\begin{aligned} (4) \quad s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \inf_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]} x^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{3n-1}{6n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \sup_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]} x^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{3n+1}{6n^2} \end{aligned}$$

DA (4), PASSANDO AL SUP PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI OTTIENE:

$$\int_{[0,1]}^- x^2 \geq \frac{1}{3}$$

MENTRE DA (5), PASSANDO ALL' INF PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI OTTIENE

$$\int_{[0,1]}^+ x^2 \leq \frac{1}{3}$$

METTENDO INSIEME LE 2 COSE SI HA:

$$\frac{1}{3} \leq \int_{[0,1]}^- x^2 \leq \int_{[0,1]}^+ x^2 \leq \frac{1}{3}$$

DA CUI SEGUE CHE x^2 È R-INTEGRABILE SU $[0,1]$ E $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

P3(b) PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. SI HA:

$$\begin{aligned} (6) \quad \underline{s}(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \inf_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} e^x = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^{i-1} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(e^{\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad \overline{s}(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \sup_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} e^x = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^i = \\ &= \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{(e^{\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1) \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \end{aligned}$$

DA (6) SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^- e^x \geq \sup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \underline{s}(f, \mathcal{P}_n) = \sup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (e-1) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \geq \lim_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (e-1) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e-1$$

MENTRE DA (7), SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^+ e^x \leq \inf_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \overline{s}(f, \mathcal{P}_n) = \inf_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (e-1) \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \leq \lim_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (e-1) \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e-1$$

METTENDO INSIEME LE 2 COSE SI HA:

$$e-1 \leq \int_{[0,1]}^- e^x \leq \int_{[0,1]}^+ e^x \leq e-1$$

DA CUI SEGUE CHE e^x È $\mathcal{R}$ -INTEGRABILE SU $[0,1]$ E $\int_0^1 e^x dx = e-1$.

P3(c) PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. SI HA:

$$\begin{aligned} (8) \quad s(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \inf_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} x^3 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^n (i-1)^3 = \\ &= \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{2n-1}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \quad S(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \sup_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} x^3 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n} \right)^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^n i^3 = \\ &= \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2n+1}{n^2}. \end{aligned}$$

DA (8), PASSANDO AL SUP PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA:

$$\int_{[0,1]}^- x^3 \geq \frac{1}{4}$$

ANALOGAMENTE DA (9) SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^+ x^3 \leq \frac{1}{4}$$

METTENDO INSIEME LE 2 COSE SI HA:

$$\frac{1}{4} \leq \int_{[0,1]}^- x^3 \leq \int_{[0,1]}^+ x^3 \leq \frac{1}{4}$$

DA CUI SEGUE CHE x^3 È $\mathcal{R}$ -INTEGRABILE SU $[0,1]$ E $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

P.4(a)

L'AFFERMAZIONE (a) PUÒ ESSERE RIFORMULATA NEL MODO SEGUENTE:

(a') SIA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA E SIA $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$\{x \in [a, b] \mid f(x) > \lambda\}$ È FINITO, ALLORA

$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ T.C. $S(f, \mathcal{P}) < \lambda(b-a) + \varepsilon$

DIMO DI (a')

SI DIMOSTRA PER INDUZIONE SUL NUMERO DI PUNTI DELL'INSIEME

$\{x \in [a, b] \mid f(x) > \lambda\}$ CHE, PER COMODITÀ, INDICHEREMO CON I_λ .

PASSO 1 I_λ HA UN SOLO PUNTO, CIOÈ $I_\lambda = \{\bar{x}\}$.

CI SONO 3 CASI: $\bar{x} \in (a, b)$, $\bar{x} = a$, $\bar{x} = b$.

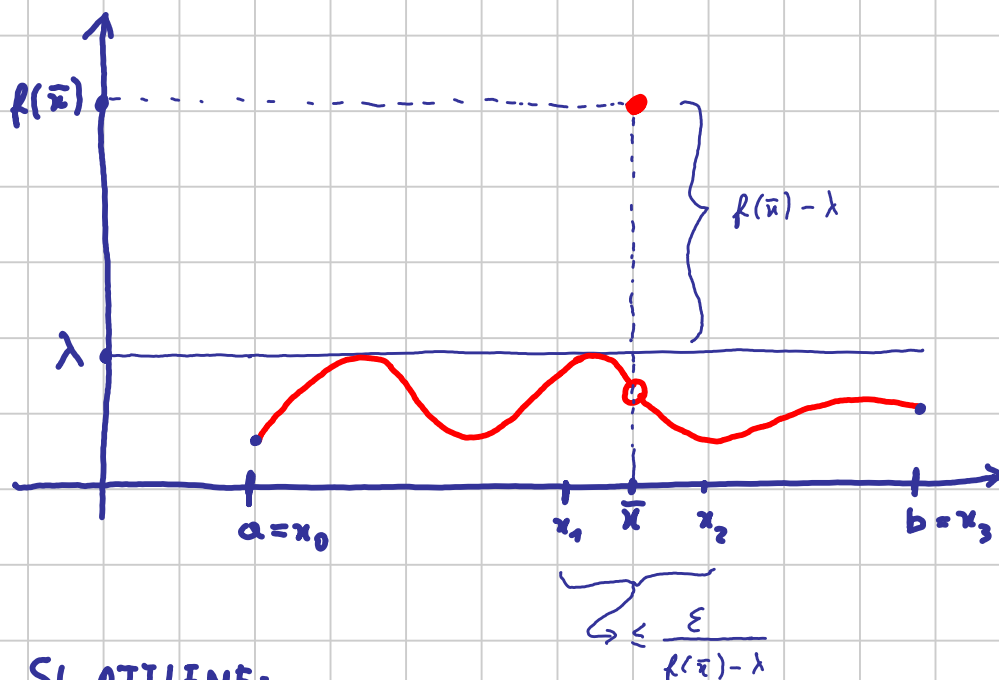
TRATTIAMO IN DETTAGLIO SOLO IL PRIMO, GLI ALTRI SONO DEL TUTTO ANALOGHI.

$\forall \varepsilon > 0$ SCEGLIAMO $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ IN MODO CHE:

(10)

$$x_1 < \bar{x} < x_2 \quad \text{E} \quad x_2 - x_1 < \frac{\varepsilon}{f(\bar{x}) - \lambda}$$

COME VEDIAMO IN FIGURA:



SI OTTIENE:

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) &= (x_1 - x_0) \cdot M_1 + (x_2 - x_1) \cdot f(\bar{x}) + (x_3 - x_2) M_3 \leq \\ &\leq (x_1 - x_0) \cdot \lambda + (x_2 - x_1) \cdot f(\bar{x}) + (x_3 - x_2) \lambda = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) \right) \cdot \lambda + (x_2 - x_1) \cdot (f(\bar{x}) - \lambda) = \\
&= (b-a) \cdot \lambda + (x_2 - x_1) \cdot (f(\bar{x}) - \lambda) < \\
&< (b-a) \cdot \lambda + \frac{\varepsilon}{f(\bar{x}) - \lambda} \cdot (f(\bar{x}) - \lambda) = (b-a) \cdot \lambda + \varepsilon.
\end{aligned}$$

PASSO 2 SE (a') VALE QUANDO I_λ HA AL MASSIMO k PUNTI ALLORA VALE ANCHE QUANDO HA $k+1$ PUNTI.

INFATTI SIA $I_\lambda = \{ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1} \}$.

PRENDIAMO C T.C. $\bar{x}_k < c < \bar{x}_{k+1}$.

GRAZIE ALL'IPOTESI INDUTTIVA, $\forall \varepsilon > 0 \exists \rho_1$ PARTIZIONE DI $[a, c]$ ED $\exists \rho_2$ PARTIZIONE DI $[c, b]$ T.C.

$$S(f, \rho_1) < \lambda \cdot (c-a) + \frac{\varepsilon}{2}$$

E

$$S(f, \rho_2) < \lambda(b-c) + \frac{\varepsilon}{2}$$

MA ALLORA $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$ È UNA PARTIZIONE DI $[a, b]$ E SI HA:

$$S(f, \rho) = S(f, \rho_1) + S(f, \rho_2) < \lambda(c-a) + \frac{\varepsilon}{2} + \lambda(b-c) + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda(b-a) + \varepsilon$$

QUINDI ρ È LA PARTIZIONE RICHIESTA PER $[a, b]$

A QUESTO PUNTO, COMBINANDO **PASSO 1** E **PASSO 2**, LA (c') SEGUE PER INDUZIONE.

P4(b)

NEL CASO DELLA NOSTRA $f(x)$, RISTRETTA A $[0, 1]$, L'INSIEME

$I_\lambda = \{ x \in [0, 1] \mid f(x) > \lambda \}$ È FINITO PER OGNI $\lambda > 0$.

INFATTI:

$$f(x) > \lambda \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{n} \quad \text{CON } 0 < n < \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{m}{n} \quad \text{CON } 0 < n < \frac{1}{\lambda} \text{ E } m \text{ COPRIMO CON } n$$

CIÒ SIGNIFICA CHE:

$I_\lambda =$ INSIEME DI TUTTE LE FRAZIONI, COMPRESSE TRA 0 E 1, TALI CHE, RIDOTTE AI MINIMI TERMINI HANNO DENOMINATORE MINORE DI $\frac{1}{\lambda}$.

AD ESEMPIO, SE $\lambda = \frac{1}{6}$, SI HA:

$$I_\lambda = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$$

SI TRATTA SEMPRE DI UN INSIEME FINITO, VISTO CHE LE FRAZIONI CON FISSATO DENOMINATORE k , CHE STANNO IN $[0, 1]$ NON SONO MAI PIÙ DI k .

DUNQUE, VISTO CHE PER OGNI $\lambda > 0$ L'INSIEME I_λ È FINITO, POSSIAMO APPLICARE P4(a) DIRE CHE:

$$\forall \lambda > 0 \quad \int_{[0,1]}^+ f \leq \lambda \cdot 1$$

DA CUI SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^+ f(x) \leq 0$$

MA DA $f \geq 0$ SEGUE ANCHE CHE:

$$\int_{[0,1]}^- f(x) \geq 0$$

QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$ E $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

P.5 PROCEDENDO COME IN P2(e) SI OSSERVA CHE, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA

$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, QUINDI SI HA:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} & \text{PER } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \\ 0 & \text{PER } x = 0 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\})$$

PURTROPPPO PERÒ, A DIFFERENZA DELLA $f(x)$ DI $\boxed{P_2(e)}$, $g(x)$ NON È MONOTONA (PER COLPA DEL $(-1)^{n+1}$).

TUTTAVIA È POSSIBILE ESPRIMERLA COME DIFFERENZA DI FUNZIONI

CRESCENTI NEL MODO SEGUENTE: DETTA $f(x)$ LA FUNZIONE DEL $\boxed{P_2(e)}$ SI HA:

$$(11) \quad g(x) = (g(x) + 3f(x)) - 3f(x)$$

VISTO CHE $f(x)$ È CRESCENTE BASTERÀ VERIFICARE CHE ANCHE $g(x) + 3f(x)$ È CRESCENTE. SI HA:

$$g(x) + 3f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{3}{n} & \text{PER } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\}) \\ 0 & \text{PER } x=0 \end{cases}$$

SICCOME $g+3f$ È COSTANTE A TRATTI, PER VERIFICARE CHE È CRESCENTE BASTERÀ MOSTRARE CHE I SALTI (CHE SONO NEI PUNTI $x_n = \frac{1}{n}$ CON $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$) SONO TUTTI POSITIVI.

SE n È PARI, IL SALTO IN $x = \frac{1}{n}$ È:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{(-1)^n}{(n-1)^2} + \frac{3}{n-1}\right) - \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{3}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{3}{n-1}\right) - \left(\frac{-1}{n^2} + \frac{3}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} = \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n(n-1)} > 0 \end{aligned}$$

SE INVECE n È DISPARI SI HA:

$$S\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{(-1)^n}{(n-1)^2} + \frac{3}{n-1}\right) - \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{3}{n}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-1}{(n-1)^2} + \frac{3}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} \right) = \\
&= -\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} = \\
&= -\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n(n-1)} = \\
&= -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right)^2 + \frac{1}{n(n-1)} = \\
&= \frac{1}{n(n-1)} - \left(\frac{1}{n(n-1)} \right)^2 > 0
\end{aligned}$$

PERCHÉ $n \geq 2$

QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE $g(n) + 3f(n)$ È CRESCENTE, E QUINDI ANCHE $\mathbb{Q}$ -INTEGRABILE.

GIÀ SAPPIAMO DAL $[P2(e)]$ CHE ANCHE f LO È.

QUINDI $g \in \mathbb{Q}([0,1])$ PERCHÉ, GRAZIE A (11), È COMBINAZIONE LINEARE DI FUNZIONI DI $\mathbb{Q}([0,1])$.

BOZZA DEL 05/03/2020
(SEGNALATEMI EVENTUALI REFUSI)