

Analisi Matematica (II modulo) - Exe. 3

Titolo nota

25 marzo 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRALE DI RIEMANN (ALTRI QUESITI)

NOTA ALCUNI PROBLEMI HANNO UN ASTERISCO: SIGNIFICA CHE SONO UN PÒ PIÙ DIFFICILI DEL QUESITO MEDIO CHE POTREI DARE ALL'ESAME.

1 DATA $f \in C([a, b])$, QUALI DELLE SEGUENTI CONDIZIONI BASTA DA SOLA A GARANTIRE CHE f È IDENTICAMENTE NULLA?

(a) $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = 0$

(b) $\forall q_1, q_2 \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \quad \int_{q_1}^{q_2} f(x) dx = 0$

(c) $\int_a^b |f(x)| dx = 0$

(d) $\forall c \in [a, b] \quad \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$

(*) 2 DATA $f \in C([a, b])$ CONVESSA, MOSTRARE CHE:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(*) 3 (a) MOSTRARE CHE SE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ È DEL TIPO $f(x) = \chi_I(x)$, CON I INTERVALLO, E $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$ È STRETTAMENTE CRESCENTE, CON $\varphi(\alpha) = a$ E $\varphi(\beta) = b$,

ALLORA SI HA:
$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

(b) COME (a) MA CON f FUNZIONE SEMPLICE.

(c) COME (a) MA CON IPOTESI PIÙ DEBOLI POSSIBILE SU f .

- 4 COSTRUIRE $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, CRESCENTE E DI CLASSE C^∞ TALE CHE
 $F(x) = 0$ PER $x \leq -1$ E $F(x) = 1$ PER $x \geq 1$.
 (SUGGERIMENTO: DEFINIRE $F(x)$ COME FUNZIONE INTEGRALE)
-

- 5 PER CIASCUNA DELLE $F(x)$ ELENCAE SOTTO DIRE QUANTE SONO
 LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE: $F(x) = 100$.

(a) $F(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$ (CON $x \in \mathbb{R}$)

(b) $F(x) = \int_0^x e^{-t^4} dt$ (CON $x \in \mathbb{R}$)

(c) $F(x) = \int_x^1 \left| \frac{1}{t} \right| dt$ (CON $x \in (0, 1)$)

(d) $F(x) = \int_0^x \sin \sqrt{t} dt$ (CON $x > 0$)

- 6 QUALI DELLE SEGUENTI $F(x)$, CHE SONO DEFINITE SU TUTTO \mathbb{R} , SONO PERIODICHE?

(a) $F(x) = \int_0^x \sin^9 t dt$ (b) $F(x) = \int_0^x \sin^8 t dt$ (c) $F(x) = \int_x^{x+1} \sin^8 t dt$

(d) $F(x) = \int_0^x (t - |t| - \frac{1}{2}) dt$ (e) $F(x) = \int_0^x \cos(\cos t) dt$ (f) $F(x) = \int_0^x \sin(\sin t) dt$

- 7 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ DEFINIAMO $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{\cos t}}{1+t^2} dt$. (a) DIRE SE \exists FINITO $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

(b) TROVARE $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

(c) DIRE SE $F(x)$ HA PUNTI DI MAX. REL.

- 8 PER OGNI $x > 0$ DEFINIAMO $F(x) = \int_{\ln x}^{\ln(1+x)} \sqrt[3]{1+e^{3t}} dt$
 TROVARE INF E SUP DI $F(x)$.
-