Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 3

Titolo nota

25 marzo 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

INTEGRALE DI RIEMANN (ALTRI QUESITI)

(NOTA ALCUNI PROBLEMI HANNO UN ASTERISCO: SIGNIFICA CHE SONO UN PÒ PIÙ DIFFICILI DEL QUESITO MEDIO CHE POTREI DARE ALL'ESAME.)

1 DATA $f \in C([a,b])$, QUALI DELLE SEGUENTI CONDIZIONI BASTA DA SOLA A GARANTIRE CHE f È IDENTICAMENTE NULLA?

(a) $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 0$ SI

(b) $\forall q_1, q_2 \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$ $\int_{q_1}^{q_2} f(x)\,dx = 0$ SI

(c) $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$ SI

(d) $\forall c \in [a,b]$ $\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$ SI

(*) **2** DATA $f \in C([a,b])$ CONVESSA, MOSTRARE CHE:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

SUGGERIMENTO: MOLTIPLICARE TUTTO PER $b-a$ E PENSARE AL SIGNIFICATO GEOMETRICO

(*) **3** (a) MOSTRARE CHE SE $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ È DEL TIPO $f(x) = \chi_I(x)$, CON I INTERVALLO, E $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ È STRETTAMENTE CRESCENTE, CON $\varphi(\alpha)=a$ E $\varphi(\beta)=b$, ALLORA SI HA:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

(b) COME (a) MA CON f FUNZIONE SEMPLICE.

(c) COME (a) MA CON IPOTESI PIÙ DEBOLI POSSIBILE SU f. (BASTA $f \in \mathcal{R}([a,b])$)

---

4 COSTRUIRE $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, CRESCENTE E DI CLASSE C^∞ TALE CHE $F(x)=0$ PER $x\leq -1$ E $F(x)=1$ PER $x\geq 1$.

(SUGGERIMENTO: DEFINIRE $F(x)$ COME FUNZIONE INTEGRALE)

(PRESA $\varphi(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}} & \text{PER } |t|<1 \\ 0 & \text{PER } |t|\geq 1 \end{cases}$

LA $F(x)$ GIUSTA È

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{1}{A}\cdot\varphi(t)\,dt$$

DOVE $A=\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt$

---

5 PER CIASCUNA DELLE $F(x)$ ELENCATE SOTTO DIRE QUANTE SONO LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE: $F(x)=100$.

(a) $F(x)=\int_0^x e^{\sin t}\,dt$ (CON $x\in\mathbb{R}$) 1 SOL.

(b) $F(x)=\int_0^x e^{-t^4}\,dt$ (CON $x\in\mathbb{R}$) NO SOL

(c) $F(x)=\int_x^1 \left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor dt$ (CON $x\in(0,1)$) 1 SOL

(d) $F(x)=\int_0^x \sin\sqrt[10]{t}\,dt$ (CON $x>0$) INFINITE SOL.

---

6 QUALI DELLE SEGUENTI $F(x)$, CHE SONO DEFINITE SU TUTTO $\mathbb{R}$, SONO PERIODICHE?

(a) $F(x)=\int_0^x \sin^9 t\,dt$ SI

(b) $F(x)=\int_0^x \sin^8 t\,dt$ NO

(c) $F(x)=\int_x^{x+1} \sin^8 t\,dt$ SI

(d) $F(x)=\int_0^x \left(t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}\right)dt$ SI

(e) $F(x)=\int_0^x \cos(\cos t)\,dt$ NO

(f) $F(x)=\int_0^x \sin(\sin t)\,dt$ SI

---

7 PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ DEFINIAMO $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^{\cos t}}{1+t^2}\,dt$.

(a) DIRE SE $\exists$ FINITO $\lim_{x\to-\infty}F(x)$ SI

(b) TROVARE $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ 0

(c) DIRE SE $F(x)$ HA PUNTI DI MAX. REL. SI

---

8 PER OGNI $x>0$ DEFINIAMO $F(x)=\int_{\ln x}^{\ln(1+x)}\sqrt[3]{1+e^{3t}}\,dt$

TROVARE INF E SUP DI $F(x)$.

INF $=1$

SUP $=+\infty$