Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 7

Titolo nota 15/08/2014

22 Aprile 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SOLUZIONI

POTREBBE ESSERCI QUALCHE REFUSO VISTO CHE NON HO POTUTO RICONTROLLARE TUTTO (VISTI I TEMPI STRETTI) CHI TROVASSE QUALCHE CORREZIONE DA FARE ME LO SEGNALI

1 $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$

a TROVARE L'INSIEME A SU CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE

b DIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI $I \subset A$ SUI QUALI C'È CONV. UNIFORME

SVOLGIMENTO

a SE $|x|<1$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

SE $|x|>1$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}+1} = 0 \cdot \frac{1}{0+1} = 0$$

INVECE SE $x=1$ SI HA:

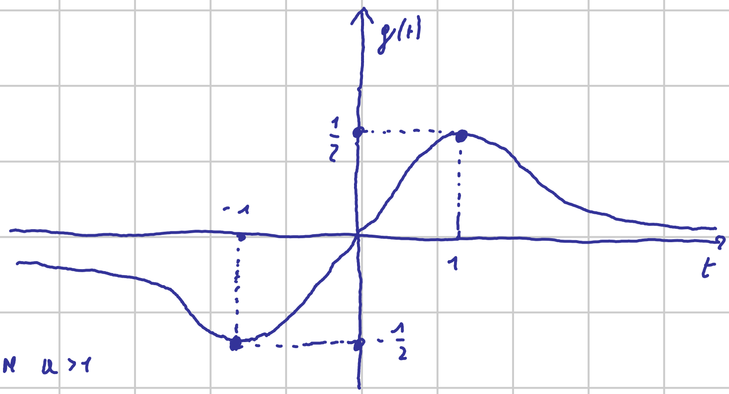
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2}$$

MENTRE SE $x=-1$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{1+1} \quad \text{NON ESISTE.}$$

QUINDI, POSTO $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ E $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } |x| \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{SE } x = 1 \end{cases}$, SI HA CHE $f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU A.

b POSTO $g(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$, IL CUI GRAFICO È:



SI HA $f(x) = g(x^n)$. INOLTRE SI HA:

(1) $|f(x)| = |g(x^n)| = g(|x|^n)$

MOSTRIAMO CHE C'È CONV. UNIFORME SUGLI INSIEMI DEL TIPO: 1) $[a,+\infty)$ E $(-\infty,-a]$ CON $a>1$

2) $[-b,b]$ CON $0<b<1$

MENTRE NON C'È CONV. UNIFORME SU $(1,+\infty)$, $(-1,1)$, $(-\infty,-1)$.

COMINCIAMO DA $[a,+\infty)$ CON $a>1$.

SICCOME SU $(1,+\infty)$ $g(t)$ È DECRESCENTE E TENDE A 0 PER $t\to+\infty$, LO STESSO FA $f(x)$ SU $[a,+\infty)$ SE $a>1$. DI CONSEGUENZA SU $[a,+\infty)$ SI HA:

$$d(f_n,f)=\sup_{x\geq a}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\geq a}|f_n(x)-0| = \sup_{x\geq a} f_n(x) = f_n(a)$$

QUINDI LA CONVERGENZA PUNTUALE PER $x=a$ IMPLICA LA CONVERGENZA UNIFORME SU $[a,+\infty)$.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA LA CONV. UNIFORME SU $(-\infty,-a]$ CON $a>1$ E SU $[-b,b]$ CON $0<b<1$.

INVECE SU $[1,+\infty)$ NON C'È CONV. UNIFORME PERCHÉ f È DISCONTINUA E LE f_n SONO TUTTE CONTINUE.

NEMMENO SU $(1,+\infty)$ LA CONV. È UNIFORME PERCHÉ, ESSENDO $f(1)=\frac{1}{2}=f_n(1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, SI HA:

$$\sup_{x\geq 1}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x>1}|f_n(x)-f(x)|$$

CIÒ SIGNIFICA CHE SE NON C'È CONV. UNIFORME SU $[1,+\infty)$ NON C'È NEMMENO SU $(1,+\infty)$.

SU $[0,1)$ E $[0,1]$ SI RAGIONA IN MODO ANALOGO.

INFINE SU $(-\infty,-1]$, $(-\infty,-1)$, $(-1,0]$ LA SITUAZIONE È SIMMETRICA.

---

2 $\quad f_n(x)=\dfrac{\sin(x^n)}{x^n}$

a TROVARE L'INSIEME A SU CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE

b DIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI $I\subset A$ SUI QUALI C'È CONV. UNIFORME

SVOLGIMENTO

a SI TROVA SUBITO CHE

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(x^n)}{x^n} = \begin{cases} \to 1 & \text{SE } 0<|x|<1 \\ \to \sin 1 & \text{SE } x=\pm 1 \\ \to 0 & \text{SE } |x|>1 \end{cases}$$

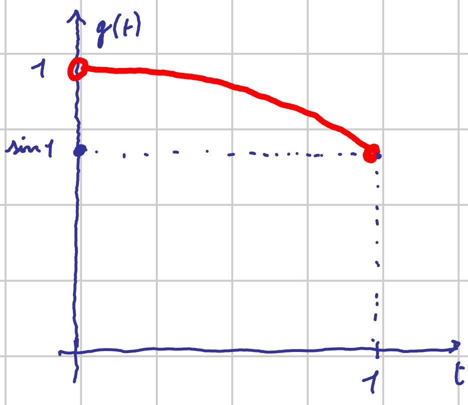
QUINDI, DETTO $A=\mathbb{R}-\{0\}$ ED $f:A\to\mathbb{R}$ DEFINITA DA $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{SE } 0<|x|<1 \\ \sin 1 & \text{SE } x=\pm 1 \\ 0 & \text{SE } |x|>1 \end{cases}$,

ABBIAMO CHE $f_n\longrightarrow f$ PUNTUALMENTE SU A.

b SIA $f(x)$ CHE TUTTE LE $f_n(x)$ SONO FUNZIONI PARI, QUINDI STUDIAMO LA CONV. SOLO PER $x>0$.

OSSERVIAMO CHE $f_n(x)=g(x^n)$ DOVE $g(t)=\dfrac{\sin t}{t}$,

IL CUI GRAFICO SU $(0,1]$ È QUELLO IN FIGURA:



QUINDI SUGLI INTERVALLI DI TIPO $(0,a]$ CON $0<a<1$ SI HA:

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in(0,a]}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(0,a]}|g(x^n)-1| =$$

$$=\sup_{t\in(0,a^n]}|g(t)-1| = |g(a^n)-1| = |f_n(a)-f(a)|$$

PERCHÉ $a^n<1$

QUINDI LA CONV. PUNTUALE IN $x=a$ IMPLICA LA CONV. UNIFORME SU $(0,a]$ QUANDO $0<a<1$.

ANCHE SULLE SEMIRETTE DEL TIPO $[a,+\infty)$ CON $a>1$ C'È CONV. UNIFORME, INFATTI:

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in[a,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[a,+\infty)}\left|\frac{\sin x^n}{x^n}-0\right|\leq\sup_{x\in[a,+\infty)}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{a^n}$$

DA CUI SEGUE CHE $d(f_n,f)\to 0$ PER $n\to+\infty$ E QUINDI LA CONV. È UNIFORME.

INVECE SU $(0,1]$ NON PUÒ ESSERCI CONV. UNIFORME VISTO CHE PER $x=1$ TUTTE LE f_n SONO CONTINUE MENTRE f NO. LO STESSO DICASI PER $[1,+\infty)$.

INFINE NEMMENO SU $(0,1)$ E SU $(1,+\infty)$ C'È CONV. UNIFORME, ALTRIMENTI DOVREBBE ESSERCI ANCHE SU $(0,1]$ E SU $[1,+\infty)$ VISTO CHE $f_n(1)=\sin(1)=f(1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

---

3 $f_n(x)=\sqrt[4]{\frac{1}{n}+x^2}$

a TROVARE L'INSIEME A SU CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE

b DIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI $I\subset A$ SUI QUALI C'È CONV. UNIFORME

SVOLGIMENTO

LA CONVERGENZA A $f(x)=\sqrt{|x|}$ È UNIFORME (E QUINDI ANCHE PUNTUALE) SU TUTTO $\mathbb{R}$, INFATTI:

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}}\sqrt[4]{\frac{1}{n}+x^2}-\sqrt{|x|}=$$

$$=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}-|x|}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+x^2}+\sqrt{|x|}}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{\frac{1}{n}}{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{n}+x^2}+\sqrt{|x|}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}+|x|\right)}=\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}}=\sqrt[4]{\frac{1}{n}}$$

DA CUI SEGUE $d(f_n,f)\to 0$.

---

4 $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^{2n}}$

a TROVARE L'INSIEME A SU CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE

b DIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI $I\subset A$ SUI QUALI C'È CONV. UNIFORME

SVOLGIMENTO

PER $|x|\leq 1$ SI HA

PERCHÉ $\sqrt[n]{1+x}\leq 1+\frac{1}{n}x$

(2) $$1\leq\sqrt[n]{1+x^{2n}}\leq\sqrt[n]{1+1}\leq 1+\frac{1}{n}$$

PER $|x|\geq 1$ SI HA:

CON $\xi\in(x^{2n},x^{2n}+1)$ GRAZIE A T. LAGRANGE APPLICATO A $g(t)=\sqrt[n]{t}$

(3) $$0\leq\sqrt[n]{1+x^{2n}}-x^2=\frac{\sqrt[n]{1+x^{2n}}-\sqrt[n]{x^{2n}}}{(1+x^{2n})-(x^{2n})}=\frac{1}{n\sqrt[n]{\xi^{n-1}}}\leq\frac{1}{n}$$

PERCHÉ ESSENDO $x\geq 1$ SI HA $\xi>1$

SE ORA DEFINIAMO $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{SE } |x|>1 \\ 1 & \text{SE } |x|\leq 1 \end{cases}$, DA **(2)** E **(3)** SEGUE CHE SU $\mathbb{R}$ SI HA

$$d(f_n,f)\leq \frac{1}{n}$$

PER CUI $d(f_n,f)\to 0$ PER $n\to+\infty$.

CIÒ SIGNIFICA CHE $f_n\to f$ UNIF. SU TUTTO $\mathbb{R}$, E QUINDI ANCHE PUNTUALMENTE.

---

5 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\cdot\sin(nx)$

a TROVARE L'INSIEME A SU CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE

b DIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI $I\subset A$ SUI QUALI C'È CONV. UNIFORME

SVOLGIMENTO

a $f_n\to f$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$, SE f È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA.

SE $x=0$ È OVVIO, SE $x\neq 0$ SI HA:

$$\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\cdot\sin(nx)\right|\leq\left|\frac{nx}{n^2x^2}\right|=\frac{1}{n\cdot|x|}\to 0 \quad \text{PER } n\to+\infty$$

b POSTO $g(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$ (COME NEL PROBLEMA $\boxed{1}$) SI HA: $f_n(x)=g(nx)\cdot\sin(nx)$.

MOSTRIAMO CHE $f_n\to f$ UNIF. SU $[a,+\infty)$ CON $a>0$. SI HA

$$d(f_n,f)=\sup_{x\geq a}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\geq a}|g(nx)\sin(nx)|\leq$$

$$\leq\sup_{x\geq a} g(nx)=\sup_{t\geq na} g(t)\overset{\text{VALE NON APPENA } n\geq\frac{1}{a}}{=} g(na)$$

MA POICHÉ:

$$\lim_{n\to+\infty} g(na)=\lim_{n\to+\infty}\frac{na}{1+n^2a^2}=0$$

SI HA ANCHE:

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n,f)=0$$

E QUINDI $f_n\to f$ UNIF. SU $[a,+\infty)$, SE $a>0$.

INVECE SU $(0,+\infty)$ LA CONV. NON PUÒ ESSERE UNIFORME, PERCHÈ $\forall n\in\mathbb{N}-\{0\}$ SI HA:

$$\sup_{x>0}|f_n(x)-f(x)|\geq\left|f_n(\tfrac{1}{n})-f(\tfrac{1}{n})\right|=g(n\cdot\tfrac{1}{n})\left|\sin(n\cdot\tfrac{1}{n})\right|=g(1)\sin(1)=\tfrac{1}{2}\sin 1>0$$

IL COMPORTAMENTO PER $x<0$ È SIMMETRICO.

---

6 $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2+x^2} \cdot \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

a TROVARE L'INSIEME A SU CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE

b DIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI $I \subset A$ SUI QUALI C'È CONV. UNIFORME

SVOLGIMENTO

a SE $f(x)$ È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA ALLORA $f_n \to f$ PUNT. SU TUTTO $\mathbb{R}$.

INFATTI, DETTA $g(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$, SI HA:

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\frac{x}{n}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) = g\left(\frac{x}{n}\right) \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

QUINDI:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{x}{n}\right) \sin\left(\frac{x}{n}\right) = g(0)\sin(0) = 0$$

b MOSTRIAMO CHE C'È CONV. UNIFORME SU $[-a, a]$ $\forall a>0$.

INFATTI SU $[-a,a]$ SI HA:

VALE NON APPENA $n \geq a$ VISTO CHE $g(t)\sin(t)$ È CRESCENTE SU $[0,1]$ ED È PARI

$$d(f_n, f) = \sup_{|x|\leq a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{|x|\leq a} \left| g\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right| = g\left(\frac{a}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{n}\right)$$

QUINDI LA CONVERGENZA PUNTUALE PER $x=a$ IMPLICA QUELLA UNIFORME SU $[-a, a]$.

INVECE NON C'È CONV. UNIFORME SU $[a, +\infty)$.

INFATTI SU $[a,+\infty)$ SI HA:

VALE NON APPENA $n \geq a$

$$d(f_n, f) = \sup_{x\geq a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq a} |f_n(x)| \geq |f_n(n)| = g(1) \cdot \sin(1) = \frac{1}{2}\sin(1) > 0$$

ANALOGAMENTE SI TROVA CHE NON C'È CONV. UNIFORME SU $(-\infty, a]$

---

7 $f_n(x) = \dfrac{n^3 x}{n^2+x^2} \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

a TROVARE L'INSIEME A SU CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE

b DIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI $I \subset A$ SUI QUALI C'È CONV. UNIFORME

SVOLGIMENTO

a POSTO $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{PER } t=0 \\ \dfrac{1}{1+t^2} \cdot \dfrac{\sin t}{t} & \text{PER } t \neq 0 \end{cases}$ SI HA:

SI NOTI CHE h È CONTINUA ANCHE PER $t=0$ E CHE IL SUO GRAFICO TRA 0 E 1 È:

$$f_n(x) = \frac{n^3 x}{n^2+x^2} \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) = x^2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)} = x^2 \cdot h\left(\frac{x}{n}\right)$$

DA CUI SEGUE CHE:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^2 \cdot h\left(\frac{x}{n}\right) = x^2 \cdot h(0) = x^2 \cdot 1 = x^2$$

QUINDI, POSTO $f(x)=x^2$, SI HA CHE $f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

b MOSTRIAMO CHE $\forall a>0$ $f_n \to f$ UNIF. SU $[-a,a]$. SI HA

PERCHÈ f_n E f SONO PARI

$$d(f_n,f) = \sup_{|x|\leq a} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{0\leq x\leq a} |f_n(x)-f(x)| =$$

VALE NON APPENA $n>a$

$$= \sup_{0\leq x\leq a} x^2 \cdot \left|h\left(\frac{x}{n}\right)-1\right| \leq a^2 \cdot \sup_{0\leq x\leq a} \left|h\left(\frac{x}{n}\right)-1\right| = a^2 \cdot \left|h\left(\frac{a}{n}\right)-1\right| = |f_n(a)-f(a)|$$

QUINDI DALLA CONV. PUNTUALE PER $x=a$ SEGUE LA CONV. UNIFORME IN $[-a,a]$.

INVECE NON PUÒ ESSERCI CONV. UNIFORME IN $[a,+\infty)$ PERCHÈ:

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(n)-f(n)| = n^2 \cdot |h(1)-1| = n^2 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\sin(1)\right) \longrightarrow +\infty$$

PER SIMMETRIA NON C'È CONV. UNIFORME NEMMENO SULLE SEMIRETTE $(-\infty,a]$

---

8 $f_n(x) = (n+1)\left(\arctan\left(x+\frac{1}{n}\right) - \arctan x\right)$

a TROVARE L'INSIEME A SU CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE

b DIRE QUALI SONO GLI INTERVALLI $I \subseteq A$ SUI QUALI C'È CONV. UNIFORME

SVOLGIMENTO

MOSTRIAMO CHE, DETTA $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, SI HA CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

SI NOTI CHE $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, QUINDI $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, QUINDI f È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE $\frac{1}{2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$f_n(x) = (n+1)\left(\arctan\left(x+\frac{1}{n}\right) - \arctan x\right) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{\arctan\left(x+\frac{1}{n}\right) - \arctan x}{\frac{1}{n}} =$$

CON $x < \xi_x < x+\frac{1}{n}$, GRAZIE AL T. DI LAGRANGE

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{1+(\xi_x)^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right) f(\xi_x)$$

QUINDI $\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right) f(\xi_x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{n}|f(\xi_x)| + |f(\xi_x) - f(x)| <$$

$$< \frac{1}{n}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot|\xi_x - x| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

QUINDI, SU $\mathbb{R}$, SI HA:

$$d(f_n, f) \leq \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

QUINDI $f_n \to f$ UNIF. SU $\mathbb{R}$.

---

9 SIANO $f \in B((-2,2))$ ED $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $B((-2,2))$ TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È **VERO** O **FALSO** CHE: $\boxed{(\forall n\ f_n \text{ È STRETTAMENTE CRESCENTE}) \Rightarrow (f \text{ STRETTAMENTE CRESCENTE})}$

SVOLGIMENTO

L'AFFERMAZIONE È **FALSA**.

COME CONTROESEMPIO BASTA PRENDERE $f_n(x) = \frac{1}{n+1}x$. CHE CONVERGE UNIFORMEMENTE SU $(-2,2)$ AD f IDENTICAMENTE NULLA. TUTTE LE f_n SONO STRETTAMENTE CRESCENTI, MENTRE LA f LO È SOLO DEBOLMENTE.

---

10 SIANO $f \in B((-2,2))$ ED $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $B((-2,2))$ TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È **VERO** O **FALSO** CHE: $\boxed{(\forall n\ f_n \text{ È CONVESSA}) \Rightarrow (f \text{ CONVESSA})}$

SVOLGIMENTO

L'AFFERMAZIONE È **VERA**.

DOBBIAMO MOSTRARE CHE, COMUNQUE SI FISSINO $x_1, x_2, x_3 \in (-2,2)$ TALI CHE $x_1 < x_2 < x_3$, SI HA:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \tag{4}$$

SAPPIAMO CHE $\forall n\in\mathbb{N}$ f_n È CONVESSA, QUINDI:

$$\frac{f_n(x_2)-f_n(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f_n(x_3)-f_n(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f_n(x_3)-f_n(x_2)}{x_3-x_2} \tag{5}$$

SICCOME $f_n(x_1) \to f(x_1)$, $f_n(x_2) \to f(x_2)$ E $f_n(x_3) \to f(x_3)$, PASSANDO AL LIMITE PER $n \to +\infty$ NELLA (5) SI OTTIENE LA (4).

SI NOTI CHE BASTA LA CONV. PUNTUALE.

11 SIANO $f \in B((-2,2))$ ED $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $B((-2,2))$ TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È **VERO** O **FALSO** CHE: $\boxed{(\forall n\ f_n \text{ È UN POLINOMIO}) \Rightarrow (f \text{ È UN POLINOMIO})}$

SVOLGIMENTO

L'AFFERMAZIONE È **FALSA**.

COME CONTROESEMPIO BASTA PRENDERE $f(x) = e^x$ E $f_n(x) = T_n(x)$ = POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n DI e^x. SAPPIAMO GIÀ CHE $T_n(x) \to e^x$ UNIFORMEMENTE SUI COMPATTI E QUINDI ANCHE SU $(-2,2)$, CHE È CONTENUTO NEL COMPATTO $[-2,2]$. TUTTAVIA TUTTI I $T_n(x)$ SONO POLINOMI MENTRE e^x NO. IN REALTÀ IL FATTO CHE e^x NON SIA UN POLINOMIO ANDREBBE DIMOSTRATO. PIÙ PRECISAMENTE VA DIMOSTRATO CHE NON CI PUÒ ESSERE ALCUN POLINOMIO $P(x)$ TALE CHE $P(x) = e^x\ \forall x \in (-2,2)$. INFATTI, SE PER ASSURDO CI FOSSE, SU TUTTO $(-2,2)$ DOVREBBE VALERE L'UGUAGLIANZA:

$$P'(x) = (e^x)' = e^x = P(x)$$

CHE È ASSURDA PERCHÉ $P(x)$ E $P'(x)$ SAREBBERO DUE POLINOMI DISTINTI CHE COINCIDONO PER INFINITI VALORI DI x, IN CONTRADDIZIONE COL PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI.

---

12 SIANO $f \in B((-2,2))$ ED $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $B((-2,2))$ TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È **VERO** O **FALSO** CHE: $\boxed{(\forall n\ f_n \text{ È UN POLINOMIO DI GRADO} \leq 2) \Rightarrow (f \text{ È UN POLINOMIO DI GRADO} \leq 2)}$

SVOLGIMENTO

L'AFFERMAZIONE È **VERA**.

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SIA $f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$.

MOSTRIAMO CHE LE SUCCESSIONI DEI COEFFICIENTI (a_n), (b_n) E (c_n) CONVERGONO.

INFATTI SI HA:

$$\begin{cases} f_n(0) = c_n \\ f_n(1) = a_n + b_n + c_n \\ f_n(-1) = a_n - b_n + c_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_n = f_n(0) \\ a_n = \dfrac{f_n(1)+f_n(-1)}{2} - f_n(0) \\ b_n = \dfrac{f_n(1)-f_n(-1)}{2} \end{cases} \xRightarrow{\text{PERCHÉ } f_n \to f} \begin{cases} c_n \to f(0) \\ a_n \to \dfrac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0) \\ b_n \to \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} \end{cases}$$

INDICHIAMO CON a, b E c I LIMITI DI (a_n), (b_n) E (c_n), RISPETTIVAMENTE, E DEFINIAMO:

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

AVREMO CHE:

$$d(f_n, P) = \sup_{x\in(-2,2)} \left|(a_n x^2 + b_n x + c_n) - (ax^2 + bx + c)\right| =$$

$$= \sup_{x\in(-2,2)} \left| (a_n - a)x^2 + (b_n - b)x + (c_n - c) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in(-2,2)} \left(|a_n - a| x^2 + |b_n - b| \cdot |x| + |c_n - c| \right) \leq$$

$$\leq \quad 4 \cdot |a_n - a| + 2|b_n - b| + |c_n - c| \longrightarrow 0 \quad \text{PER } n \to +\infty$$

QUINDI $f_n \to P$ UNIFORMEMENTE. MA POICHÈ $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE ALLORA DEVE ESSERE $f = P$ = POLINOMIO DI GRADO ≤ 2.

---

13 SIANO $f \in B((-2,2))$ ED $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $B((-2,2))$ TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È **VERO** O **FALSO** CHE: (∀n f_n È LIPSCHITZIANA) ⇒ (f È LIPSCHITZIANA)

SVOLGIMENTO

L'AFFERMAZIONE È **FALSA**.

COME CONTROESEMPIO BASTA PRENDERE f ED (f_n) DEL PROB. 3, CIOÈ $f(x) = \sqrt{|x|}$ E $f_n(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{n} + x^2}$. SAPPIAMO GIÀ CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{R}$, QUINDI ANCHE SU $(-2,2)$.

INOLTRE $f(x) = \sqrt{|x|}$ NON È LIPSC., MA TUTTE LE f_n SI, PERCHÈ SONO C^1 SU $[-2,2]$ QUINDI LIPSCHITZIANE SU $[-2,2]$, QUINDI ANCHE SU $(-2,2)$

---

14 SIANO $f \in B((-2,2))$ ED $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $B((-2,2))$ TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È **VERO** O **FALSO** CHE: (∀n f_n HA COSTANTE DI LIPSCHITZ 5) ⇒ (f HA COSTANTE DI LIPSCHITZ 5)

SVOLGIMENTO

L'AFFERMAZIONE È **VERA**.

DOBBIAMO MOSTRARE CHE, COMUNQUE SI FISSINO $x_1, x_2 \in (-2,2)$ TALI CHE $x_1 \neq x_2$ SI HA:

(6)
$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq 5$$

SAPPIAMO CHE $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n HA COSTANTE DI LIPSCHITZ 5, QUINDI:

(7)
$$\left| \frac{f_n(x_2) - f_n(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq 5$$

SICCOME $f_n(x_1) \to f(x_1)$ E $f_n(x_2) \to f(x_2)$, PASSANDO AL LIMITE PER $n \to +\infty$ NELLA **(7)** SI OTTIENE LA **(6)**.

SI NOTI CHE BASTA LA CONV. PUNTUALE.

15 SIANO $f \in B((-2,2))$ ED $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $B((-2,2))$ TALE CHE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È **VERO** O **FALSO** CHE: $\boxed{(\forall n \ f_n \text{ HA UN MINIMO RELATIVO IN } x=0) \Rightarrow (f \text{ HA UN MINIMO RELATIVO IN } 0)}$

SVOLGIMENTO

L'AFFERMAZIONE È **FALSA**.

COME CONTROESEMPIO BASTA PRENDERE

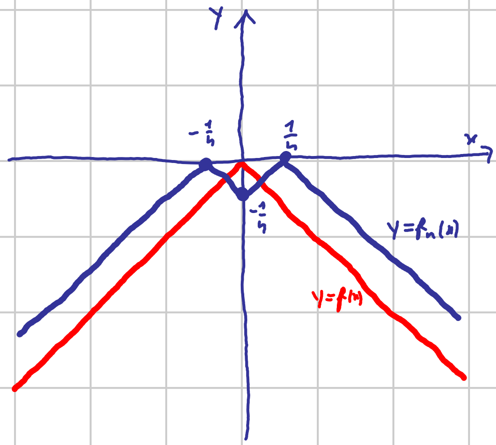
$f(x) = -|x|$ E $f_n(x) = -\left|\,|x| - \frac{1}{n}\right|$

ABBIAMO CHE $d(f_n, f) = \frac{1}{n} \to 0$, QUINDI

$f_n \to f$ UNIFORMEMENTE.

INOLTRE TUTTE LE f_n HANNO UN MIN. REL.

PER $x=0$, MENTRE f NON CE L'HA.



16 LE SUCCESSIONI (f_n) E (g_n) SONO DEFINITE PER RICORRENZA

SULL'INTERVALLO $[1,2]$ NEL MODO SEGUENTE:

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ g_0(x) = x^3 \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{2 f_n(x)\, g_n(x)}{f_n(x) + g_n(x)} \\ g_{n+1}(x) = \dfrac{f_n(x) + g_n(x)}{2} \end{cases}$$

STUDIARE LA CONVERGENZA UNIFORME DI (f_n) E (g_n).

SVOLGIMENTO

STUDIAMO PRIMA LA CONV. PUNTUALE.

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE AD OGNI PASSO IL PRODOTTO TRA $f_n(x)$ E $g_n(x)$ RIMANE INVARIATO. INFATTI:

$$f_{n+1}(x) \cdot g_{n+1}(x) = \frac{\cancel{2} f_n(x) \cdot g_n(x)}{\cancel{f_n(x) + g_n(x)}} \cdot \frac{\cancel{f_n(x) + g_n(x)}}{\cancel{2}} = f_n(x) \cdot g_n(x)$$

QUINDI, $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$f_n(x)\, g_n(x) = \dots = f_0(x) \cdot g_0(x) = x^4$$

SI NOTI INOLTRE CHE $f_n(x)$ E $g_n(x)$, PER COME SONO DEFINITI, SONO SEMPRE POSITIVI.

OSSERVIAMO CHE $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA:

PERCHÈ MEDIA ARMONICA ≤ MEDIA GEOMETRICA

$$f_{n+1}(x) = \frac{2 f_n(x)\cdot g_n(x)}{f_n(x)+g_n(x)} = \frac{2}{\frac{1}{g_n(x)}+\frac{1}{f_n(x)}} \leq \sqrt{g_n(x)\cdot f_n(x)} = \sqrt{f_0(x)\cdot g_0(x)} = \sqrt{x^4} = x^2$$

PERCHÈ MEDIA ARITMETICA ≥ MEDIA GEOMETRICA

$$g_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)+g_n(x)}{2} \geq \sqrt{f_n(x)\cdot g_n(x)} = \sqrt{f_0(x)\cdot g_0(x)} = \sqrt{x^4} = x^2$$

PERCHÈ $x \in [1,2]$

VISTO CHE PER $n=0$ SAPPIAMO GIÀ CHE $f_0(x) = x \leq x^2 \leq x^3 = g_0(x)$, POSSIAMO CONCLUDERE CHE

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \leq x^2 \leq g_n(x)$$

INOLTRE $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$f_{n+1}(x) = \frac{2 f_n(x)\cdot g_n(x)}{f_n(x)+g_n(x)} = f_n(x)\cdot \frac{2 g_n(x)}{f_n(x)+g_n(x)} \geq f_n(x)\cdot 1 = f_n(x)$$

$$g_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)+g_n(x)}{2} \leq \frac{g_n(x)+g_n(x)}{2} = g_n(x)$$

DI CONSEGUENZA:

(8) $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq x^2 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$$

CIÒ SIGNIFICA CHE $(f_n(x))$ È CRESCENTE E LIMITATA E $(g_n(x))$ È DECRESCENTE E LIMITATA. ENTRAMBE QUINDI HANNO LIMITE FINITO.

QUINDI, $\forall x \in [1,2]$, SIANO $\ell_1(x)$ E $\ell_2(x)$ I LIMITI DI $(f_n(x))$ E DI $(g_n(x))$ RISPETTIVAMENTE.

GRAZIE A **(8)** ABBIAMO CHE:

(9) $$\forall x \in [1,2] \qquad \ell_1(x) \leq x^2 \leq \ell_2(x)$$

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\ell_1(x) = x^2 = \ell_2(x)$. A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE:

(10) $$\left|g_{n+1}(x) - f_{n+1}(x)\right| = \left|\frac{f_n(x)+g_n(x)}{2} - \frac{2 g_n(x) f_n(x)}{f_n(x)+g_n(x)}\right| =$$

$$= \left|\frac{(f_n(x)+g_n(x))^2 - 4 g_n(x) f_n(x)}{2\cdot(f_n(x)+g_n(x))}\right| =$$

$$= \left|\frac{(g_n(x)-f_n(x))^2}{2(g_n(x)+f_n(x))}\right| = \left|g_n(x)-f_n(x)\right|\cdot\left|\frac{g_n(x)-f_n(x)}{2(g_n(x)+f_n(x))}\right| \leq \frac{1}{2}\left|g_n(x)-f_n(x)\right|$$

APPLICANDO **(10)** RIPETUTAMENTE SI OTTIENE CHE:

(11) $\forall n \in \mathbb{N}$ E $\forall x \in [1,2]$ $\quad |g_n(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} |g_0(x) - f_0(x)| = \frac{1}{2^n} |x^3 - x|$

DA CUI SEGUE CHE:

$$|\ell_2(x) - \ell_1(x)| = \left| \lim_{n \to +\infty} g_n(x) - \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right| = \lim_{n \to +\infty} |g_n(x) - f_n(x)| \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} |x^3 - x| = 0$$

QUINDI SI OTTIENE $\ell_1(x) = \ell_2(x)$, CHE COMBINATA CON **(9)** IMPLICA $\ell_1(x) = x^2 = \ell_2(x)$.

QUINDI (f_n) E (g_n) CONVERGONO PUNTUALMENTE A $f(x) = x^2$.

PER MOSTRARE CHE LA CONV. È UNIFORME SI NOTI CHE PASSANDO AL SUP PER $x \in [1,2]$ NELLA **(11)** SI OTTIENE:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad d(f_n, g_n) \leq \frac{1}{2^n} \cdot 7$$

QUINDI, SICCOME $f_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x)$, SI HA ANCHE

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d(f_n, f) \leq \frac{7}{2^n} \quad \text{E} \quad d(g_n, f) \leq \frac{7}{2^n}$$

QUINDI $d(f_n, f) \to 0$ E $d(g_n, f) \to 0$, CIOÈ LA CONV. È UNIFORME.
