

Analisi Matematica (II modulo) - Exe. 9

Titolo nota

15/08/2014

6 maggio 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

SOLUZIONI

P.1 RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = 2x^3 e^{y-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

SVOLGIMENTO

SICCOME e^y NON SI ANNULLA MAI, LA SOL. $y(x)$ SODDISFA:

(1)

$$-e^{-y(x)} y'(x) = -2x^3 e^{-x^2}$$

ABBIAMO:

$$\begin{aligned} \int -2x^3 e^{-x^2} &= \int -x^2 e^{-x^2} \cdot (2x) dx = \int -u e^{-u} du = \\ &= \int u (e^{-u})' du = u e^{-u} - \int e^{-u} du = \\ &= u e^{-u} + e^{-u} = (x^2 + 1) e^{-x^2} \end{aligned}$$

QUINDI LA (1) DIVENTA:

$$(e^{-y(x)})' = ((x^2 + 1) e^{-x^2})'$$

CIOÈ

$$e^{-y(x)} = (x^2 + 1) \cdot e^{-x^2} + c$$

DACUI SEGUE:

(2)
$$y(x) = -\ln((x^2 + 1) \cdot e^{-x^2} + c)$$

MA PERCHÈ SIA $y(0) = 0$, DEVE ESSERE:

$$-0 = \ln((0+1) \cdot e^0 + c)$$

CIOÈ:

$$0 = \ln(1 + c)$$

DA CUI SEGUE $c = 0$.

QUINDI LA (2) DIVENTA:

$$Y(x) = -\ln((x^2+1) \cdot e^{-x^2}) = x^2 - \ln(1+x^2)$$

CHE È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE $Y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE. INFATTI:

$$Y'(x) = (x^2 - \ln(1+x^2))' = 2x - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x+2x^3-2x}{1+x^2} = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

E

$$2x^3 \cdot e^{Y(x)-x^2} = 2x^3 \cdot e^{-\ln(1+x^2)} = 2x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

UGUALI

QUINDI LA SOL. MASSIMALE DEL SISTEMA È $(\mathbb{R}, Y(x))$ CON $Y(x)$ DATA DA:

$$Y(x) = x^2 - \ln(1+x^2)$$

P.2 RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} Y' = -Y^2 \cos x e^{-\frac{1}{Y} + \sin x} \\ Y(0) = \frac{1}{\ln 2} \end{cases}$

SVOLGIMENTO

DETTA $Y(x)$ LA SOL. CERCATA, ESSA DEVE SODDISFARE:

$$Y'(x) = -(Y(x))^2 e^{-\frac{1}{Y(x)}} \cdot \cos x e^{\sin x}$$

CHE, FINCHÉ $Y(x) \neq 0$, EQUIVALE A:

$$e^{\frac{1}{Y(x)}} \cdot \left(-\frac{1}{(Y(x))^2}\right) \cdot Y'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

CIOÈ:

$$\left(e^{\frac{1}{Y(x)}}\right)' = \left(e^{\sin x}\right)'$$

CIOÈ:

$$e^{\frac{1}{Y(x)}} = e^{\sin x} + c$$

CIOÈ:

$$Y(x) = \frac{1}{\ln(e^{\sin x} + c)}$$

RICORDANDO CHE DEVE ESSERE $Y(0) = \frac{1}{\ln 2}$, SI HA:

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln(e^0 + c)}$$

DA CUI SEGUE $C=1$, PER CUI LA SOL CERCATA È:

$$Y(x) = \frac{1}{\ln(e^{\sin x} + 1)}$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE TALE $Y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE. INFATTI:

$$Y'(x) = \left(\frac{1}{\ln(1 + e^{\sin x})} \right)' = - \frac{1}{\ln^2(1 + e^{\sin x})} \cdot \frac{1}{1 + e^{\sin x}} \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}$$

UGUALI

$$-(Y(x))^2 \cos x \cdot e^{-\frac{1}{Y(x)} + \sin x} = - \frac{1}{\ln^2(1 + e^{\sin x})} \cdot \cos x \cdot \frac{1}{e^{\ln(1 + e^{\sin x})}} \cdot e^{\sin x} =$$

$$= - \frac{1}{\ln^2(1 + e^{\sin x})} \cdot \frac{1}{1 + e^{\sin x}} \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}$$

P.3 RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} Y' = \frac{\pi \cdot (Y^2 - 2Y + 2)}{2\sqrt{x}} \\ Y\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases}$

SVOLGIMENTO

LA SOLUZIONE CERCATA $Y(x)$ DEVE SODDISFARE:

(3) $Y'(x) = ((Y(x))^2 - 2Y(x) + 2) \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$

MA SICCOME $Y^2 - 2Y + 2$, CIOÈ $(Y-1)^2 + 1$, NON SI ANNULLA MAI, LA **(3)** EQUIVALE A:

$$\frac{1}{(Y(x)-1)^2 + 1} Y'(x) = \pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

CIOÈ:

$$\left(\arctan(Y(x)-1) \right)' = \left(\pi \sqrt{x} \right)'$$

CIOÈ:

$$\arctan(Y(x)-1) = \pi \sqrt{x} + C$$

CIOÈ:

$$Y(x) = 1 + \tan(\pi \sqrt{x} + C)$$

MA AFFINCHÈ SIA $Y\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, DEVE ESSERE:

$$0 = 1 + \tan\left(\pi \cdot \frac{1}{2} + C\right)$$

CIOÈ $C = -\frac{3}{4}\pi$.

QUINDI LA SOL. CERCATA È:

(4)

$$Y(x) = 1 + \tan\left(\pi\sqrt{x} - \frac{3}{4}\pi\right)$$

L'INTERVALLO MASSIMALE DEL DOMINIO DI $Y(x)$ CHE CONTIENE IL PUNTO $x_0 = \frac{1}{4}$ È:

$$-\frac{\pi}{2} < \pi\sqrt{x} - \frac{3}{4}\pi < \frac{\pi}{2}$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{4} < \sqrt{x} < \frac{5}{4}$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{16} < x < \frac{25}{16}$$

POICHÈ LA VERIFICA DIRETTA (CHE STAVOLTA OMETTIAMO) MOSTRA CHE (4) SODDISFA L'EQUAZIONE SU TUTTO L'INTERVALLO $\left(\frac{1}{16}, \frac{25}{16}\right)$, POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA SOL. CERCATA È $(I, Y(x))$, CON $I = \left(\frac{1}{16}, \frac{25}{16}\right)$ E $Y(x)$ DATO DA (4).

P.4 RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} Y' = -\frac{(\sqrt[3]{Y^2} + 2\sqrt[3]{Y})^2}{4x} \\ Y(1) = 8 \end{cases}$$

(5)

SVOLGIMENTO

LA FUNZIONE:

$$F(Y) = (\sqrt[3]{Y^2} + 2\sqrt[3]{Y})^2 = \sqrt[3]{Y^2} \cdot (\sqrt[3]{Y} + 2)^2$$

SI ANNULLA PER $Y=0$ E $Y=-8$, QUINDI L'EQUAZIONE (NON IL P. DI CAUCHY!) HA 2 SOL. COSTANTI: $Y_1(x) \equiv 0$ E $Y_2(x) \equiv -8$.

SI NOTI CHE $F(Y)$ NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0, QUINDI NEI PUNTI DI ORDINATA 0 NON VALE IL TED. DI ES. E UNICITÀ.

CIO' SIGNIFICA CHE LA SOLUZIONE COSTANTE $Y(x) \equiv 0$ POTREBBE ESSERE INTERSECATO DA ALTRE SOLUZIONI.

INVECE LA SOL. $Y_2(x) \equiv -8$ NON PUÒ ESSERE INTERSECATO, PERCHÈ IL TED. DI ES. E UNICITÀ VALE.

QUINDI LA SOL. $Y(x)$ DI (5), FINCHÈ ESISTE, STARÀ SOPRA QUOTA -8. INOLTRE IL SUO INTERVALLO DI DEFINIZIONE I È CONTENUTO IN $(0, +\infty)$ VISTO CHE PER $x=0$, IL SECONDO

MEMBRO DELL'EQUAZIONE NON È DEFINITO.

IN TUTTI I CALCOLI CHE SEGUONO SUPPORREMO QUINDI

(6) $y(x) > -8$ E $x > 0$

CERCHIAMO QUINDI, CON TALI VINCOLI, TUTTE LE $y(x)$ CHE SODDISFANO L'EQUAZIONE, CIOÈ TALI CHE:

$$y'(x) = - \frac{\sqrt[3]{(y(x))^2} \cdot (\sqrt[3]{y(x)} + 2)^2}{4x}$$

SE OLTRE A (6) VALE $y(x) \neq 0$, CIÒ EQUIVALE A:

$$- \frac{y'(x)}{(\sqrt[3]{y(x)} + 2)^2 \cdot 3\sqrt[3]{(y(x))^2}} = \frac{1}{12x}$$

CHE, ESSENDO $x > 0$, EQUIVALE A:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y(x)} + 2} \right)' = \left(\frac{1}{12} \ln x \right)'$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{y(x)} + 2} = \frac{1}{12} \ln x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

(7)
$$y(x) = \left(\frac{12}{12C + \ln x} - 2 \right)^3 \quad C \in \mathbb{R}$$

LA VERIFICA DIRETTA [...] MOSTRA CHE $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE SU TUTTO IL SUO DOMINIO, PER OGNI FISSATO $C \in \mathbb{R}$. SE VOGLIAMO CHE $y(1) = 8$ BISOGNA CHE:

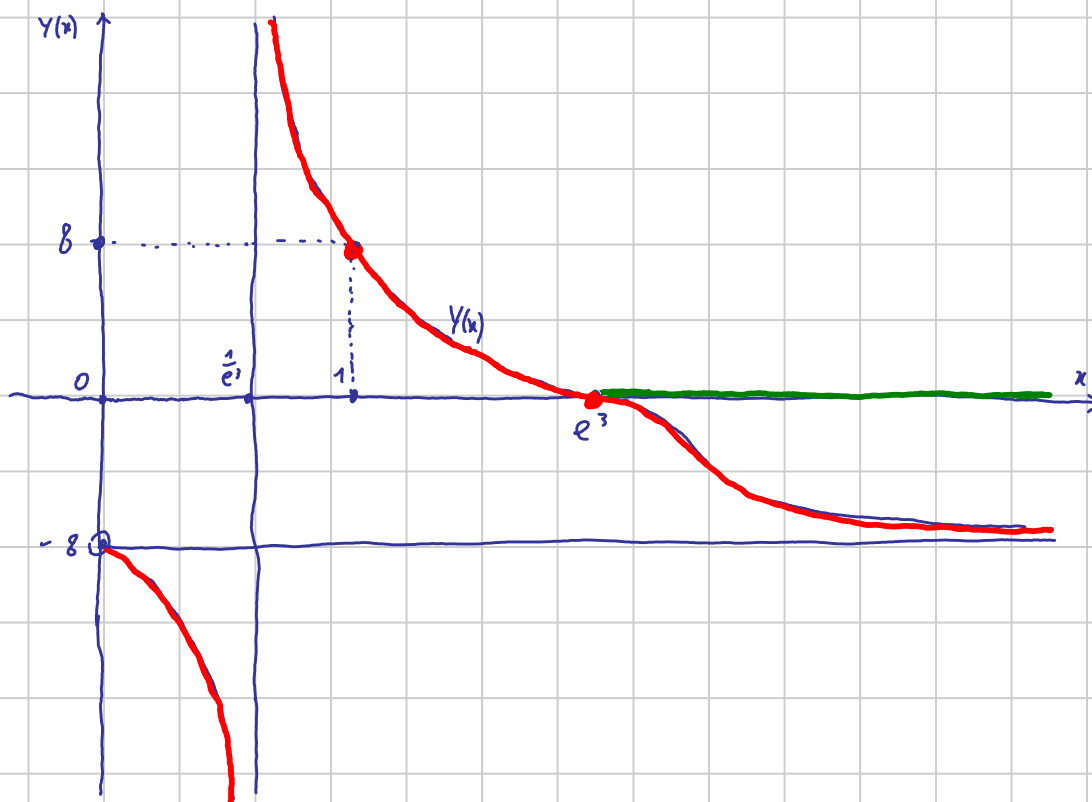
$$8 = \left(\frac{12}{12C + \ln 1} \right)^3$$

CIOÈ CHE $C = \frac{1}{4}$.

QUINDI UNA SOL. DI (5) È DATA DA:

(8)
$$y(x) = \left(\frac{12}{3 + \ln x} - 2 \right)^3$$

SI NOTI CHE $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE PER OGNI x DEL SUO DOMINIO, IN PARTICOLARE ANCHE PER $x = e^3$, PUNTO NEL QUALE $y(x)$ TOCCA QUOTA 0, QUINDI INTERSECA LA SOL. COSTANTE $y(x) \equiv 0$. FACENDO GLI OPPORTUNI CALCOLI SI TROVA CHE IL GRAFICO DI $y(x)$ È IL SEGUENTE.



QUINDI COME SOL. MASSIMALE DI (5) POSSO PRENDERE $(I, y(x))$ CON $I = (\frac{1}{e}, +\infty)$ E $y(x)$ DATA DA (8). PERÒ NON È L'UNICA POSSIBILITÀ: VISTO CHE PER $x=e^3$ LA DERIVATA SI ANNULLA, POSSO ANCHE SCEGLIERE:

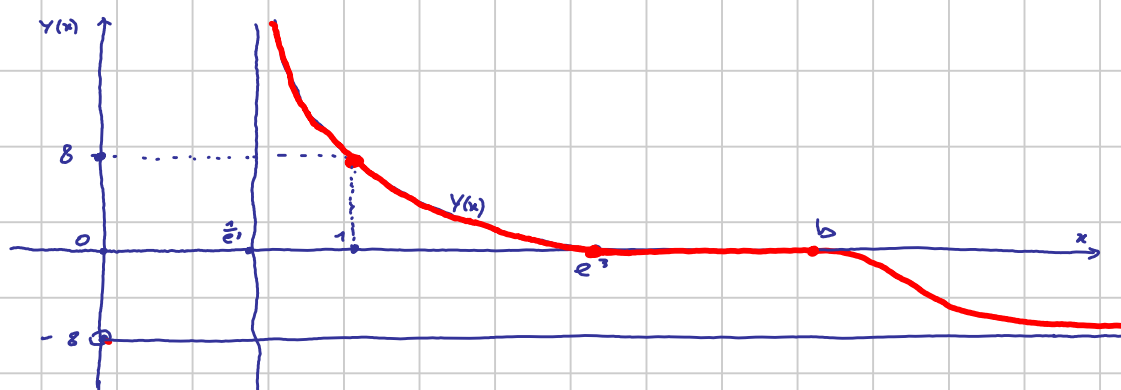
$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} \left(\frac{12}{3+\ln x} - 2 \right)^3 & \text{PER } \frac{1}{e^3} < x < e^3 \\ 0 & \text{PER } x \geq e^3 \end{cases}$$

OPPURE, PIÙ IN GENERALE, PER OGNI $b > e^3$, POSSO DEFINIRE:

$$y_b(x) = \begin{cases} \left(\frac{12}{3+\ln x} - 2 \right)^3 & \text{PER } \frac{1}{e^3} < x < e^3 \\ 0 & \text{PER } e^3 \leq x \leq b \\ \left(\frac{12}{6-\ln b + \ln x} - 2 \right)^3 & \text{PER } x > b \end{cases}$$

OTTENUTA DA (7)
METTENDO $C = \frac{6-\ln b}{12}$

IL GRAFICO DI $y_b(x)$ È IL SEGUENTE:



LE SOL. DI (5) SONO INFINITE: VANNO BENE SIA $y(x)$, SIA $\tilde{y}(x)$ SIA $y_b(x) \forall b > e^3$.

P.5 RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = 3 \cos^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 y \\ y(4\pi) = -5\pi \end{cases}$$

(9)

SVOLGIMENTO

LA SOL. $y(x)$ DI (9), FINCHÉ VIVE, RIMANE COMPRESA TRA LE 2 SOL. COSTANTI

$y(x) \equiv -\frac{11}{2}\pi$ E $y(x) \equiv -\frac{9}{2}\pi$. ESSA SODDISFA:

$$y'(x) = 3 \cos^2 x \sin x \cdot \cos^2(y(x))$$

CHE, ESSENDO $-\frac{11}{2}\pi < y(x) < -\frac{9}{2}\pi$, EQUIVALE A:

$$\frac{y'(x)}{\cos^2(y(x))} = 3 \cos^2 x \sin x$$

CIOÈ:

$$(\tan y(x))' = (-\cos^3 x)'$$

CIOÈ:

$$\tan y(x) = -\cos^3 x + C$$

CHE, PER $-\frac{11}{2}\pi < y(x) < -\frac{9}{2}\pi$, EQUIVALE A:

(10)
$$y(x) = -5\pi + \arctan(C - \cos^3 x)$$

PERCHÉ SIA $y(4\pi) = -5\pi$ BISOGNA CHE:

$$-5\pi = -5\pi + \arctan(C - 1)$$

CIOÈ CHE $C=1$. QUINDI PONENDO $C=1$ NELLA (10) SI OTTIENE LA SOL. CERCATA:

$$y(x) = -5\pi + \arctan(1 - \cos^3 x)$$

P.6 RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = 3 \cos^2 x \cdot |\sin x| \cdot \cos^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(11)

SVOLGIMENTO

DETTA $y(x)$ LA SOL DI (11), FINCHÉ VIVE RIMANE NELLA ZONA COMPRESA TRA LE 2 SOL. COSTANTI

$y(x) \equiv -\frac{\pi}{2}$ E $y(x) \equiv \frac{\pi}{2}$. INOLTRE, SODDISFA L'EQUAZIONE:

(12)
$$y'(x) = 3 \cos^3 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 y(x) \quad \text{SE } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \text{ CON } k \in \mathbb{Z}$$

E

(13)
$$y'(x) = 3 \cos^3 x \cdot (-\sin x) \cdot \cos^2 y(x) \quad \text{SE } (2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi, \text{ CON } k \in \mathbb{Z}$$

PROCEDENDO COME IN **P.5** SI TROVA CHE **(12)** EQUIVALE A:

$$\tan y(x) = C - \cos^3 x$$

CHE, SICCOME $-\frac{\pi}{2} < y(x) < \frac{\pi}{2}$, EQUIVALE A:

(14)
$$y(x) = \arctan(C - \cos^3 x)$$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI TROVA CHE SE $y(x)$ SODDISFA **(13)** ALLORA È DELLA FORMA:

(15)
$$y(x) = \arctan(C + \cos^3 x)$$

QUINDI SU OGNI INTERVALLO DI TIPO $[k\pi, (k+1)\pi]$ SCELGO $y(x)$ DEL TIPO **(14)**, SE k È PARI, E DEL TIPO **(15)**, SE k È DISPARI, AVENDO CURA CHE TUTTI I "PEZZI" SI RACCORDINO IN MODO LISCIO NEI PUNTI DI TIPO $x = k\pi$ E CHE INOLTRE $y(0) = 0$.

PIÙ PRECISAMENTE SI TROVA:

$$y(x) = \begin{cases} \arctan(1 - \cos^3 x) & \text{PER } x \in [0, \pi] \\ \arctan(3 + \cos^3 x) & \text{PER } x \in [\pi, 2\pi] \\ \arctan(5 - \cos^3 x) & \text{PER } x \in [2\pi, 3\pi] \\ \arctan(7 + \cos^3 x) & \text{PER } x \in [3\pi, 4\pi] \\ \vdots & \vdots \\ \arctan(2k+1 - (-1)^k \cos^3 x) & \text{PER } x \in [k\pi, (k+1)\pi] \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

TALE $y(x)$ È DI CLASSE C^1 PERCHÉ NEI PUNTI DI RACCORDO $x = k\pi$ SI HA

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi^-} \arctan(2k-1 - (-1)^{k-1} \cos^3 x) = \arctan(2k-1 + (-1)^k \cdot (\cos k\pi)^3) \\ = \arctan(2k-1 + (-1)^k \cdot ((-1)^k)^3) = \arctan 2k$$

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi^+} \arctan(2k+1 - (-1)^k \cos^3 x) = \arctan(2k+1 - (-1)^k (\cos k\pi)^3) = \\ = \arctan(2k+1 - (-1)^k ((-1)^k)^3) = \arctan 2k$$

⇒ IN $x = k\pi$
 $y(x)$ È
CONTINUA

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi^-} 3\cos^2 x \cdot |\sin x| \cdot \cos^2 y(x) = 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \cos^2(\arctan 2k) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow k\pi^+} y'(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi^+} 3\cos^2 x \cdot |\sin x| \cdot \cos^2 y(x) = 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \cos^2(\arctan 2k) = 0$$

⇒ IN $x = k\pi$
 $y(x)$ È
DERIVABILE
CON DERIVATA 0

IL FATTO CHE ANCHE NEI PUNTI DI RACCORDO $y(x)$ SODDISFI L'EQUAZIONE, SEGUE DAL FATTO CHE IN TALI PUNTI SI ANNULLA SIA $y'(x)$ SIA IL SECONDO MEMBRO.

P.7 TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $y' = \frac{y}{x}$.

SVOLGIMENTO

RISOLVIAMO PRIMA PER $x > 0$. SICCOME È LINEARE OMOGENEA DEL 1° ORDINE LA SOLUZIONE GENERALE È:

$$(16) \quad y(x) = k e^{A(x)} \quad k \in \mathbb{R}$$

DOVE $A(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $\frac{1}{x}$. PER $x > 0$ PRENDIAMO $A(x) = \ln x$, QUINDI:

$$y(x) = k e^{\ln x} = kx \quad k \in \mathbb{R}$$

QUINDI, PER $x > 0$, LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE LE SEMIRETTE DEL SEMIPIANO $x > 0$, CHE PARTONO DALL'ORIGINE.

IN MODO ANALOGO LE SOL. PER $x < 0$ SONO TUTTE E SOLE LE SEMIRETTE CHE PARTONO DALL'ORIGINE E STANNO NEL SEMIPIANO $x < 0$.

P.8 TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $y' = y \ln y$

SVOLGIMENTO

IL SECONDO MEMBRO HA SENSO SULL' INSIEME $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. INOLTRE, PER

OGNI $(x_0, y_0) \in A$, IL PB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = y \ln y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SODDISFA SEMPRE LE IPOTESI DEL TEO DI ES. E UNICITÀ LOCALE. DI CONSEGUENZA 2 SOL.

DELL'EQ. NON POSSONO MAI INTERSECARSI. QUINDI SE TROVIAMO UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI

I CUI GRAFICI "COPRONO" TUTTO L' INSIEME A TALE FAMIGLIA È L' INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI.

TOLTA LA SOL COSTANTE $y_1(x) \equiv 1$, PER TUTTE LE ALTRE POSSO SCRIVERE CHE SODDISFANO:

$$\frac{y'(x)}{y(x) \ln(y(x))} = 1$$

CIOÈ:

$$\left(\ln |\ln(y(x))| \right)' = (x)'$$

CIOÈ:

$$\ln |\ln(y(x))| = x + C \quad C \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$|\ln(y(x))| = e^c \cdot e^x \quad c \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

(12)

$$\ln(y(x)) = \pm e^c \cdot e^x \quad c \in \mathbb{R}$$

SE ORA, ALLE (12) AGGIUNGO LA SOL. COSTANTE = 1, CHE HO GIÀ TROVATO, OTTENGO CHE LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE LE $y(x)$ TALI CHE

$$\ln(y(x)) = k e^x \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

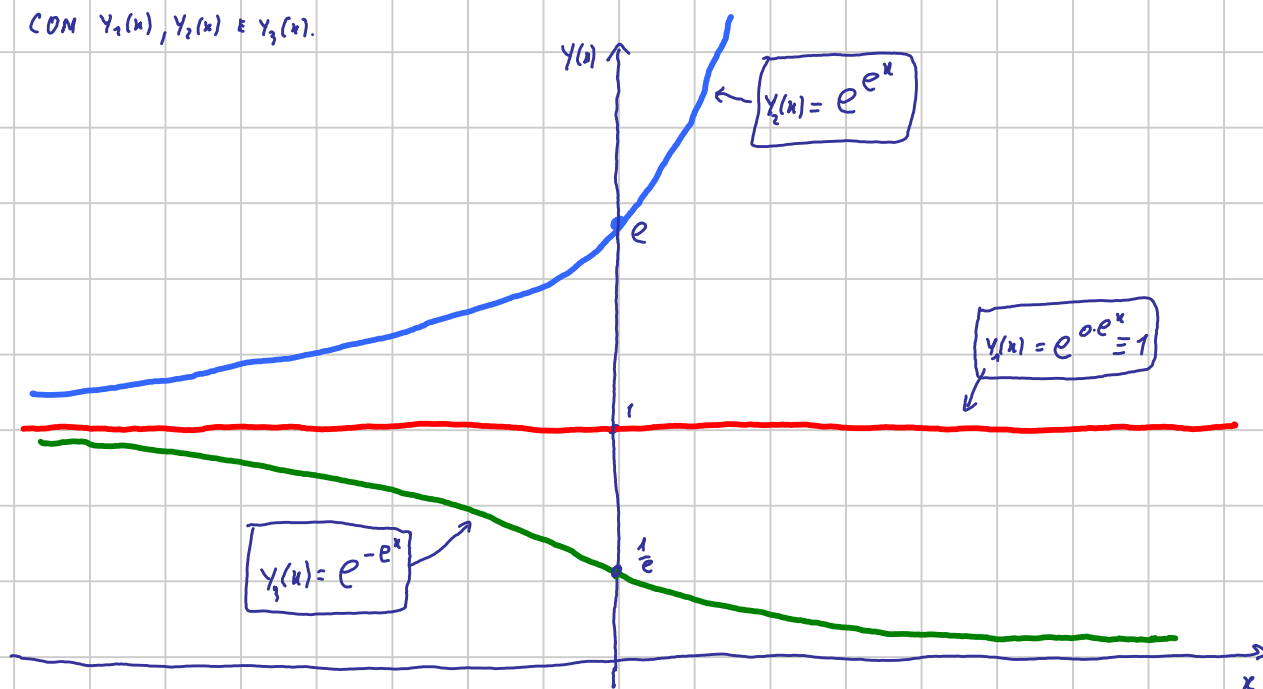
CIOÈ:

(13)

$$y(x) = e^{k e^x} \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

MOSTRIAMO CHE, AL VARIARE DI $k \in \mathbb{R}$ LE $y(x)$ DATE DA (13) RIEMPIONO TUTTO A .

PER CAPIRE MEGLIO COSA SUCCEDDE DISEGNAMO $y(x)$ PER $k=0$, $k=1$, $k=-1$, CHE INDICHIAMO CON $y_1(x)$, $y_2(x)$ E $y_3(x)$.



OSSERVIAMO CHE OGNI $y(x) = e^{k e^x}$ CON $k > 0$ SI PUÒ OTTENERE TRASLANDO LA $y_2(x) = e^{e^x}$. INFATTI, SE $k > 0$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $k = e^{x_0}$, QUINDI

$$y(x) = e^{k e^x} = e^{e^{x_0} \cdot e^x} = e^{e^{x-x_0}} = y_2(x-x_0)$$

ANALOGAMENTE OGNI $y(x) = e^{k e^x}$ CON $k < 0$ SI OTTIENE TRASLANDO $y_3(x) = e^{-e^x}$.

INFATTI, SE $k < 0$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ T.C. $k = -e^{-x_0}$, QUINDI:

$$y(x) = e^{k e^x} = e^{-e^{-x_0} \cdot e^x} = e^{-e^{x-x_0}} = y_3(x-x_0)$$

SICCOME $y_3(x) \rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$ E $y_3(x) \rightarrow 1$ PER $x \rightarrow -\infty$, LE SUE TRASLATE RIEMPIONO

TUTTA LA STRISCIA $\{(x, y) \mid 0 < y < 1\}$.

ANALOGAMENTE, CON LE TRASLATE DI $y_2(x)$ SI RIEMPIE TUTTO L'INSIEME $A = \{(x, y) \mid y > 1\}$.

CON $y_0(x)$ SI COPRE LA RETTA RIMANENTE.

QUINDI CON

$$y(x) = e^{ke^x} \quad k \in \mathbb{R}$$

SI COPRE TUTTO IL SEMIPIANO $y > 0$. QUINDI SONO TUTTE LE SOLUZIONI.

NOTA IL FATTO CHE SE $y(x)$ È SOLUZIONE, ANCHE LE SUE TRASLATE SONO SOLUZIONI, SI POTEVA GIÀ INDOVINARE DAL FATTO CHE AL II° MEMBRO DELL'EQUAZIONE NON COMPARE ESPlicitAMENTE LA x (LE EQUAZIONI CON QUESTA PROPRIETÀ SI DICONO AUTONOME). INFATTI SE $y(x)$ È SOLUZIONE, SE PRENDO $v(x) = y(x - x_0)$ ANCHE $v(x)$ È SOLUZIONE. INFATTI:

$$v'(x) = (y(x - x_0))' = y'(x - x_0) = F(y(x - x_0)) = F(v(x))$$

PERCHÉ $y(x)$ È SOLUZIONE

TUTTO QUESTO NON FUNZIONA SE AL II° MEMBRO DELL'EQUAZIONE COMPARE ESPlicitAMENTE LA x .

P.9 TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $y' = e^{-y} \tan x$.

SVOLGIMENTO

TROVIAMO TUTTE LE SOLUZIONI IL CUI INTERVALLO MASSIMALE DI DEFINIZIONE STA IN $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

SI HA:

$$y'(x) = e^{-y(x)} \tan x$$

CIOÈ:

$$e^{y(x)} y'(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

CIOÈ:

$$(e^{y(x)})' = (-\ln(\cos x))'$$

CIOÈ:

$$e^{y(x)} = -\ln(\cos x) + C$$

PERCHÉ SE $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
ALLORA $\cos x > 0$

DA CUI SEGUE:

(19)

$$y(x) = \ln \left(c + \ln \frac{1}{\cos x} \right) \quad c \in \mathbb{R}$$

PER OGNI FISSATO c IL DOMINIO DI $y(x)$ È $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ SE $c > 0$, MENTRE SE $c < 0$ PRENDO COME INTERVALLO DI DEFINIZIONE $(-\frac{\pi}{2}, -\arccos e^c)$ OPPURE $(\arccos e^c, \frac{\pi}{2})$.

ORA, AL VARIARE DI $c \in \mathbb{R}$, LA FAMIGLIA DI TUTTE LE $y(x)$ DATE DA (19) RIEMPIE TUTTA LA STRISCIA $A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$, PERCHÉ $\forall (x_0, y_0) \in A_0$ BASTA PRENDERE

$$c = e^{y_0} + \ln(\cos x_0) \quad \text{E SI OTTIENE}$$

$$y(x) = \ln \left(e^{y_0} + \ln(\cos x_0) + \ln \left(\frac{1}{\cos x} \right) \right)$$

CHÉ SODDISFA OVVIAMENTE $y(x_0) = y_0$.

QUINDI (19) RICOPRE TUTTA LA STRISCIA A_0 , QUINDI NON CI SONO ALTRE SOLUZ. IN A_0 .

A QUESTO PUNTO, PER RIEMPIRE LA STRISCIA $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ BASTA PRENDERE TUTTE LE $v(x)$ DEL TIPO

$$v(x) = y(x - k\pi)$$

CON $y(x)$ DATE DALLA (19).

TALI $v(x)$ INFATTI SONO SOLUZIONI PERCHÉ:

$$v'(x) = (y(x - k\pi))' = y'(x - k\pi) = e^{-y(x - k\pi)} \tan(x - k\pi) = e^{-v(x)} \tan(x - k\pi) = e^{-v(x)} \tan x$$

PERCHÉ $y(x)$
È SOLUZIONE

P.10 TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI

(20)

$$y' = \frac{xy \ln y^2}{1 + x^4}$$

SVOLGIMENTO

$F(y) = y \ln y^2$ NON È DEFINITA PER $y = 0$ E SI ANNULLA PER $y = \pm 1$.

INOLTRE OGNI $y_0 \neq 0$ HA UN INTORNO IN CUI F È LIPSCHITZIANA, QUINDI $\forall (x_0, y_0)$,

CON $y_0 \neq 0$, IL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = \frac{xy \ln y^2}{1 + x^4} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

HA UNA E UNA SOLA SOLUZIONE.

QUINDI SE TROVO UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI DI (20) CHE RIEMPIE L'INSIEME

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$, AVRÒ TROVATO TUTTE LE SOLUZIONI.

INTANTO OSSERVIAMO CHE CI SONO LE SOL. COSTANTI $y_1(x) \equiv 1$ E $y_2(x) \equiv -1$.

PER TROVARE OGNI ALTRA SOL. $y(x)$, TALE CHE $y(x) \neq 0, 1, -1$, OSSERVIAMO CHE SODDISFA:

$$\frac{y'(x)}{y(x) \ln|y(x)|} = \frac{2x}{1+x^4}$$

CIOÈ:

$$\left(\ln |\ln|y(x)|| \right)' = \left(\arctan x^2 \right)'$$

CIOÈ

$$\ln |\ln|y(x)|| = \arctan x^2 + C \quad C \in \mathbb{R}$$

CIOÈ

$$\ln|y(x)| = \pm e^C \cdot e^{\arctan x^2} \quad C \in \mathbb{R}$$

CHE, CON L'AGGIUNTA DELLE SOL. COSTANTI $y_1(x) \equiv 1$ E $y_2(x) \equiv -1$, EQUIVALE A:

$$\ln|y(x)| = k e^{\arctan x^2} \quad k \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

(21)

$$y(x) = \pm e^{k e^{\arctan x^2}} \quad k \in \mathbb{R}$$

TUTTE LE $y(x)$ DEFINITE DA (21) SODDISFANO (20) PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. INOLTRE RIEMPIRONO TUTTO L'INSIEME A, PERCHÉ PER OGNI $(x_0, y_0) \in A$ PERCHÉ $y(x)$ CI PASSI, BASTA PRENDERE

$$y(x) = +e^{k e^{\arctan x^2}} \quad \text{CON } k = \ln y_0 \cdot e^{-\arctan x_0^2}$$

SE $y_0 > 0$, MENTRE SE $y_0 < 0$ SI PRENDE

$$y(x) = -e^{k e^{\arctan x^2}} \quad \text{CON } k = \ln(-y_0) \cdot e^{-\arctan x_0^2}$$

QUINDI LE $y(x)$ DATE DA (21) SONO TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI DI (20).

P.11

SIA $(I, y(x))$ LA SOLUZIONE MASSIMALE DI

$$\begin{cases} y' = x e^x \sin(y^2 - 4y + 3) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(21)

a) TROVARE $\inf_{x \in I} y(x)$ E $\sup_{x \in I} y(x)$ (E, SE CI SONO, ANCHE $\max_{x \in I} y(x)$ E $\min_{x \in I} y(x)$)

b) CALCOLARE $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - 2}{x^2}$

SVOLGIMENTO

NON SI RIESCE A TROVARE ESPLICITAMENTE LA $y(x)$, QUINDI RICAVIAMO LE INFORMAZIONI CHE CI SERVONO DIRETTAMENTE DA (21).

INFO 1 FINCHÉ $y(x)$ ESISTE SODDISFA $1 < y(x) < 3$.

INFATTI L'E.Q. DIFF. PUÒ ESSERE RISCRIITA:

(22)

$$y' = x e^x \min((y-1)(y-3))$$

DA CUI SEGUE SUBITO CHE CI SONO 2 SOL. COSTANTI $y_1(x) \equiv 1$ E $y_2(x) \equiv 3$.

QUINDI, VISTO CHE $y(x)$ VALE 2 PER $x=0$ E NON PUÒ MAI INTERSECCARE NE

$y_1(x)$ NÉ $y_2(x)$, FINCHÉ ESISTE RIMARRÀ SEMPRE TRA $y_1(x)$ E $y_2(x)$

INFO 2 DETTO $I=(a,b)$ L'INTERVALLO DI DEFINIZIONE DI $y(x)$, $y(x)$ CRESCE SU $(a,0]$ E DECRESCe SU $[0,b)$.

BASTA OSSERVARE CHE IL TERMINE

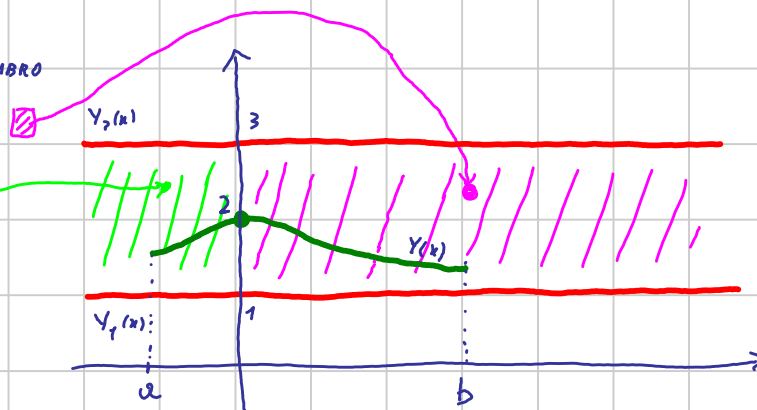
DI (22) È NEGATIVO NELLA ZONA

E POSITIVO NELLA ZONA

QUINDI, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE,

$y'(x) > 0$ PER $x < 0$ E $y'(x) < 0$

PER $x > 0$.



POSSIAMO A QUESTO PUNTO DIRE CHE: $\sup y(x) = \max y(x) = y(0) = 2$

INFO 3 $b = +\infty$

SE PER ASSURDO FOSSE $b \in \mathbb{R}$, GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $y(x)$, SI AVREBBE:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = y_0 \in [1, 2]$$

PRESA ORA $v(x) \in C^1(b-\delta, b+\delta)$ SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} y' = x e^x \min(y^2 - 4y + 3) \\ y(b) = y_0 \end{cases}$$

E DEFINITA:

$$u(x) = \begin{cases} y(x) & \text{se } x \in (a, b) \\ v(x) & \text{se } x \in [b, b+\delta) \end{cases}$$

MOSTRIAMO CHE $u(x)$ È SOL. DI (21) SU TUTTO $(a, b+\delta)$.

A TALE SCOPO, VISTO CHE SIA $y(x)$ CHE $v(x)$ RISOLVONO L'EQ. DIFF., BASTA MOSTRARE CHE SI RACCORDANO BENE PER $x=b$.

ABBIAMO:

1) u È CONTINUA IN b PERCHÉ: $\lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = y_0 = v(b)$

2) u È DERIVABILE IN b PERCHÉ:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x e^x \sin(y^2 - 4y + 3) = b e^b \sin(y_0^2 - 4y_0 + 3) = v'(b) = \lim_{x \rightarrow b^+} v'(x)$$

QUINDI $u \in C^1((a, b+b))$.

IL FATTO CHE u SIA UN PROLUNGAMENTO DI $y(x)$ CONTRADDICE IL FATTO CHE $((a, b), y(x))$ SIA MASSIMALE

QUINDI DEVE ESSERE $b = +\infty$.

INFO 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1$

GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $y(x)$ TALE LIMITE ESISTE E SI HA:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = l \in [1, 2]$$

SE PER ASSURDO FOSSE $l \neq 1$, CIOÈ $l \in (1, 2]$, SI AVEREBBE:

PERCHÉ SE $l \in (1, 2]$ ALLORA $\sin(l^2 - 4l + 3) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x \sin(y^2 - 4y + 3) = +\infty \cdot \sin(l^2 - 4l + 3) = -\infty$$

MA ALLORA $\exists x_0 > 0$ T.C. $\forall x > x_0$ $y'(x) < -1$ E QUINDI, PER $x > x_0$ SI HA:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x y'(u) du \leq y(x_0) + \int_{x_0}^x -1 du \leq y(x_0) - (x - x_0) \rightarrow -\infty \text{ PER } x \rightarrow +\infty$$

IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $y(x)$ È LIMITATA.

QUINDI $l = 1$.

POSSIAMO A QUESTO PUNTO DIRE CHE $\inf y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1$ MA $\min y(x)$ NON ESISTE

PER RISPONDERE A **6** OSSERVIAMO CHE:

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 0 \cdot e^0 \cdot \sin((y(0))^2 - 4y(0) + 3) = 0$$

PER TROVARE $y''(0)$, DERIVIAMO AMBO I MEMBRI DELL'EQUAZIONE:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left(x e^x \sin((y(x))^2 - 4y(x) + 3) \right)' = \\ &= e^x \sin((y(x))^2 - 4y(x) + 3) + x e^x \sin((y(x))^2 - 4y(x) + 3) + x e^x \cos((y(x))^2 - 4y(x) + 3) \cdot y'(x) \end{aligned}$$

QUINDI:

$$y''(0) = e^0 \cdot \sin(2^2 - 4 \cdot 2 + 3) + 0 \cdot e^0 \sin(2^2 - 4 \cdot 2 + 3) + 0 \cdot e^0 \cdot \cos(2^2 - 4 \cdot 2 + 3) \cdot 0 = -\sin 1$$

DUNQUE ABBIAMO TROVATO:

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \quad \text{E} \quad y''(0) = -\sin 1$$

QUINDI:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - 2}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x)}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''(x)}{2} = \frac{y''(0)}{2} = -\frac{1}{2} \sin 1$$

P.12 DEFINIAMO $F(y) = \begin{cases} -y \ln y & \text{SE } y > 0 \\ 0 & \text{SE } y \leq 0 \end{cases}$ E CONSIDERIAMO IL PR. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

a MOSTRARE CHE F NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0.

b DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE IL PR. DI CAUCHY ASSEGNATO HA UNA SOLA SOL. OPPURE NO

SVOLGIMENTO

a SI OSSERVI CHE PER $y=0$ $F(y)$ È CONTINUA PERCHÉ:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} -y \ln y = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 = F(0)$$

TUTTAVIA NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0, VISTO CHE:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(y) - F(0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y \ln y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} (-\ln y) = +\infty.$$

b L'UNICA SOLUZIONE DI .

(23)

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

È LA SOL. COSTANTE $y(x) \equiv 0$.

PER DIMOSTRARLO PERÒ NON POSSIAMO INVOCARE IL TED. ES. E UNICITÀ LOCALE, CHE NON VALE NEI PUNTI DELL'ASSE x .

TUTTAVIA SAPPIAMO CHE

1) NEI PUNTI (x_0, y_0) TALI CHE $y_0 \neq 0$ IL PR. DI CAUCHY

(24)

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SODDISFA LE IPOTESI DEL TED. DI ESISTENZA E UNICITÀ

2) SE $y_0 < 0$ LA SOL. DI (24) È LA FUNZIONE COSTANTE $y(x) = y_0$

3) SE $y_0 > 0$ LA SOL. DI (24) È GIÀ STATA TROVATA NEL [P.8] ED È DATA DA:

(25)

$$y(x) = y_0 e^{x-x_0}$$

SI NOTI CHE NESSUNA DELLE SOLUZIONI DEI PUNTI 2) E 3) SODDISFA $y(0)=0$.

MOSTRIAMO ORA CHE SE $y(x)$ È SOL. DI (23) NON PUÒ MAI ESSERE STRETTAMENTE POSITIVA.

A TALE SCOPO, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SIA $y_n(x)$ LA SOL. DI (24) CON $x_0=0$ E $y_0 = \frac{1}{n}$. GRAZIE (25) SAPPIAMO CHE:

$$y_n(x) = \left(\frac{1}{n}\right) e^x$$

È IMMEDIATO VERIFICARE CHE OGNI y_n È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$ E CHE

$$y_n \rightarrow 0 \quad \text{PUNTUALMENTE SU } \mathbb{R}.$$

INOLTRE, SICCOME $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ IL GRAFICO DI $y_n(x)$ STA TUTTO NEL SEMIPIANO $y > 0$, IL TED. DI ESISTENZA E UNICITÀ MI GARANTISCE CHE OGNI ALTRA SOLUZIONE NON PUÒ INTERSECARLA.

IN PARTICOLARE OGNI EVENTUALE SOLUZIONE $y(x)$ DI (23), VISTO CHE $y(0)=0 < \frac{1}{n} = y_n(0)$ PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, DOVRÀ ESSERE ANCHE:

$$y(x) < y_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

DI CONSEGUENZA $\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$y(x) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x) = 0$$

QUESTO DIMOSTRA CHE OGNI EVENTUALE SOLUZIONE $y(x)$ DI (23) NON PUÒ ASSUMERE VALORI POSITIVI.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE $y(x)$ NON PUÒ ASSUMERE VALORI NEGATIVI USANDO LE SOL. DEL PUNTO 2) AL POSTO DI QUELLE DEL PUNTO 3).

QUINDI L'UNICA SOLUZIONE DI (23) È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA.
