ANALISI MATEMATICA 2

PROVA SCRITTA DEL 20/07/2020

1 DATO L'INTEGRALE IMPROPRIO DIPENDENTE DAL PARAMETRO $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} (x^4 - 4x^3)\, e^{\lambda x}\, dx$$

(3 PUNTI) → **a** STUDIARNE LA CONVERGENZA AL VARIARE DI $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3 PUNTI) → **b** CALCOLARLO PER $\lambda = -1$.

2 DATA LA SERIE:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}$$

STUDIARNE LA CONVERGENZA:

(6 PUNTI) → **a** SEMPLICE

(FACOLTATIVA) → **b** ASSOLUTA

3 PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SIA $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x^n}{1 + x^n}\right)$$

(2 PUNTI) → **a** TROVARE $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $[0, +\infty)$.

(5 PUNTI) → **b** DIRE SE $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU $[1,2]$, $(1,2]$, $[2,3]$ E $[2,+\infty)$.

(FACOLTATIVA) → **c** PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA $F_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$; STUDIARE CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME DI (F_n) SU $[0, +\infty)$.

4 DATO IL PROB. DI CAUCHY:

6 PUNTI

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos^2(2y)}{1+x^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

RISOLVERLO NEI CASI $y_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$ E $y_0 = \frac{\pi}{4}$.

5 DATO $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ DEFINIAMO:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y + x y^2}{2x^2 + 3y^2} & \text{SE } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

6 PUNTI → **a** DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE IN $(0,0)$ f È DIFFERENZIABILE.

FACOLTATIVA → **b** COME $\boxed{a}$, MA CON $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y < x\sqrt{x}\}$

SOLUZIONI

1 **a** SE $\lambda \geq 0$, SI HA:

$$(x^4-4x^3)e^{\lambda x} \overset{\text{DEFINITIVAMENTE PER } x \to +\infty}{\geq} e^{\lambda x} \geq 1$$

QUINDI, DAL FATTO CHE $\int_0^{+\infty} 1\, dx$ DIVERGE SEGUE PER CONFRONTO CHE ANCHE

$$\int_0^{+\infty} (x^4-4x^3)e^{\lambda x}\, dx \quad \text{DIVERGE}$$

PER $\lambda \geq 0$.

INVECE, SE $\lambda < 0$ SAPPIAMO CHE, DEFINITIVAMENTE IN x, PER $x \to +\infty$, SI HA:

$$0 < (x^4-4x^3)e^{\lambda x} < \frac{1}{1+x^2}$$

QUINDI, SICCOME $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ CONVERGE, PER CONFRONTO ANCHE

$$\int_0^{+\infty} (x^4-4x^3)e^{\lambda x}\, dx \quad \text{CONVERGE}$$

PER $\lambda < 0$.

b PER OGNI $b>0$ SI HA:

$$\int_0^b (x^4-4x^3)e^{-x}\, dx = \overbrace{\int_0^b x^4 e^{-x}\, dx}^{A} - \overbrace{\int_0^b 4x^3 e^{-x}\, dx}^{B}$$

$$A = \int_0^b x^4 \cdot (-e^{-x})'\, dx = \left[x^4 \cdot (-e^{-x})\right]_0^b + \int_0^b 4x^3 e^{-x}\, dx$$

QUINDI:

$$A + B = \left[x^4 \cdot (-e^{-x})\right]_0^b + \cancel{\int_0^b 4x^3 e^{-x}\, dx} - \cancel{\int_0^b 4x^3 e^{-x}\, dx} = \left[-x^4 e^{-x}\right]_0^b$$

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE:

$$\int_0^{+\infty}(x^4-4x^3)e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b (x^4-4x^3)e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(A + B\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-x^4\cdot e^{-x}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -b^4\cdot e^{-b} = 0$$

---

2 **a** SI HA:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\overbrace{\frac{\cos\sqrt{n^2+1}-\cos n}{\sqrt{n^2+1}}}^{a_n} + \overbrace{\frac{\cos n}{\sqrt{n^2+1}}}^{b_n}\right)$$

PER MOSTRARE CHE LA NOSTRA SERIE CONVERGE BASTA QUINDI MOSTRARE CHE CONVERGONO LE 2 SERIE: $\sum a_n$ E $\sum b_n$

COMINCIAMO DA $\sum a_n$. SI HA:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\boxed{\frac{\cos\sqrt{n^2+1}-\cos n}{\sqrt{n^2+1}-n}}\cdot\boxed{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)} =$$

TEO. DI LAGRANGE

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\boxed{\left(-\sin\xi_n\right)}\cdot\boxed{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}}$$

PERCHÉ $\sqrt{n^2+1}-n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

QUINDI:

$$|a_n| \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \approx \frac{1}{2n^2}$$

SICCOME $\sum\frac{1}{n^2}$ CONVERGE, PER CONFRONTO CONVERGE ANCHE $\sum|a_n|$ E QUINDI ANCHE $\sum a_n$.

INVECE, PER MOSTRARE CHE $\sum b_n$ CONVERGE USIAMO IL CRITERIO DI ABEL. INFATTI:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \cos n$$

CON $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \to 0$ DECRESCENDO.
IL FATTO CHE $S_n = \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n$ SIA UNA SUCCESSIONE LIMITATA È GIÀ STATO DIMOSTRATO A LEZIONE.
QUINDI $\sum b_n$ SODDISFA LE IPOTESI DEL CRITERIO DI ABEL, QUINDI CONVERGE.
POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE LA NOSTRA SERIE DI PARTENZA CONVERGE PERCHÈ SOMMA DI SERIE CONVERGENTI.

b MOSTRIAMO ORA CHE, INVECE:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \right| \quad \text{DIVERGE}$$

PREMETTIAMO ALCUNE OSSERVAZIONI CHE RIGUARDANO SEMPLICI PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE $f(n) = \sqrt{n^2+1}$.

OSS.1 PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA $0 < f(n+1) - f(n) < 1$.

INFATTI:

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n) = \frac{\xi_n}{\sqrt{\xi_n^2+1}} \qquad \text{CON } n < \xi_n < n+1$$

E SI HA OVVIAMENTE:

$$0 < \frac{\xi_n}{\sqrt{\xi_n^2+1}} < 1$$

OSS.2 PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA $f(n+6) - f(n) > 4$

INFATTI:

$$f(n+6) - f(n) = \sqrt{(n+6)^2+1} - \sqrt{n^2+1} = \frac{(n+6)^2+1-n^2-1}{\sqrt{(n+6)^2+1} + \sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{12n+36}{\sqrt{(n+6)^2+1}+\sqrt{n^2+1}} > \frac{12n+36}{n+7+n+1} > \frac{8n+32}{2n+8} = 4$$

$\boxed{\text{OSS.3}}$ QUALSIASI SIA $n \in \mathbb{N}$, ALMENO UNO DEI 7 VALORI $f(n), f(n+1), \dots, f(n+6)$ DISTA MENO DI $\frac{1}{2}$ DA UN MULTIPLO DI π

INFATTI, GRAZIE ALL' $\boxed{\text{OSS. 2}}$, L'INTERVALLO $[f(n), f(n+6)]$ HA LUNGHEZZA MAGGIORE DI 4, QUINDI CONTIENE, ALMENO UN MULTIPLO DI π. DI CONSEGUENZA ALMENO UNO DEGLI INTERVALLI:

$$[f(n), f(n+1)], \ [f(n+1), f(n+2)], \dots, [f(n+5), f(n+6)]$$

CONTIENE UN MULTIPLO DI π. MA SICCOME, PER L' $\boxed{\text{OSS.1}}$, TALI INTERVALLI HANNO TUTTI LUNGHEZZA MINORE DI 1, ALMENO UNO DEI LORO ESTREMI DISTA MENO DI $\frac{1}{2}$ DA UN MULTIPLO DI π.

$\boxed{\text{OSS.4}}$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, ALMENO UNO DEI 7 VALORI:

$$|\cos f(n)|, \ |\cos f(n+1)|, \dots, |\cos f(n+6)|$$

È MAGGIORE DI $\frac{1}{2}$.

INFATTI, GRAZIE ALL' $\boxed{\text{OSS.3}}$ SAPPIAMO CHE ESISTE $k \in \{0, \dots, 6\}$ ED ESISTE $m \in \mathbb{N}$ TALE CHE $|f(n+k) - m\pi| < \frac{1}{2}$. QUINDI:

$$|\cos f(n+k)| \geq |\cos m\pi| - \underbrace{|\cos m\pi - \cos f(n+k)|}_{\leq} \geq$$

PERCHÉ $\cos x$ È LIPSCHITZ. CON COST. $= 1$

$$\geq |\cos m\pi| - |m\pi - f(n+k)| >$$

$$> |\cos m\pi| - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

SIAMO ORA PRONTI A DIMOSTRARE CHE:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \right| \text{ DIVERGE}$$

A TALE SCOPO SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE.

SICCOME LA SERIE È A TERMINI POSITIVI, PER DIMOSTRARE CHE $S_n \to +\infty$ BASTERÀ DIMOSTRARE CHE UNA SUA SOTTOSUCC. TENDE A $+\infty$. MOSTRIAMO QUINDI CHE $S_{7n} \to +\infty$.

RICORDANDO CHE $f(n)=\sqrt{n^2+1}$, SI HA:

$$S_{7n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{|\cos f(7k+1)|}{f(7k+1)}+\dots+\frac{|\cos f(7k+7)|}{f(7k+7)}\right) \geq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{2}}{f(7k+7)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2f(7k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{(7k)^2+1}}$$

PERCHÉ GRAZIE ALL'OSS.4, UNO DEI 7 TERMINI IN PARENTESI È SEMPRE $> \frac{\frac{1}{2}}{f(7k+i)} > \frac{\frac{1}{2}}{f(7k+7)}$ MENTRE GLI ALTRI 6 SONO SEMPRE ≥ 0

A QUESTO PUNTO, PER MOSTRARE CHE $S_{7n} \to +\infty$, BASTA MOSTRARE CHE:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{(7k)^2+1}} \quad \text{DIVERGE}$$

MA CIÒ SEGUE SUBITO DAL CR. DEL CONF. ASINTOTICO PERCHÉ:

$$\frac{1}{2\sqrt{(7k)^2+1}} \simeq \frac{1}{14k} = \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{k}$$

E SAPPIAMO CHE $\sum \frac{1}{k}$ DIVERGE.

$\boxed{3}$ $\boxed{a}$ ABBIAMO CHE:

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{SE } 0\leq x<1 \\ \sin\frac{1}{2} & \text{SE } x=1 \\ \sin 1 & \text{SE } x>1 \end{cases}$$

QUINDI BASTA PORRE:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } 0\leq x<1 \\ \sin\frac{1}{2} & \text{SE } x=1 \\ \sin 1 & \text{SE } x>1 \end{cases}$$

PER AVERE CHE $f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU $[0,+\infty)$.

b SU $[1,2]$ LA CONVERGENZA NON PUÒ ESSERE UNIFORME PERCHÈ LE f_n SONO TUTTE CONTINUE SU $[1,2]$ MENTRE f È DISCONTINUA PER $x=1$.

NEMMENO SU $(1,2]$ LA CONV. È UNIFORME PERCHÉ, ESSENDO $f(1)=\sin\frac{1}{2}=f_n(1)$, PER OGNI $n\in\mathbb{N}$, SI HA:

$$\sup_{x\in[1,2]}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \sup_{x\in(1,2]}\left|f_n(x)-f(x)\right|$$

QUINDI SE CI FOSSE CONV. UNIFORME IN $(1,2]$ CI SAREBBE ANCHE IN $[1,2]$, MA NON C'È.

INVECE LA CONVERGENZA È UNIFORME SULLE SEMIRETTE DEL TIPO $[a,+\infty)$, CON $a>1$. QUINDI C'È ANCHE SU $[2,3]$ E $[2,+\infty)$.

INFATTI SU $[a,+\infty)$ SI HA:

$$d(f_n,f)=\sup_{x\geq a}\left|f_n(x)-f(x)\right| =$$

PERCHÈ $f_n(x)$ È CRESCENTE E MINORE DI $\sin 1$, QUINDI IL DISLIVELLO MASSIMO È IN a

$$=\sup_{x\geq a}\left(\sin 1-\sin\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)\right) =$$

PERCHÉ $a>1$

$$=\left(\sin 1-\sin\left(\frac{a^n}{1+a^n}\right)\right)\longrightarrow 0 \quad \text{PER } n\to+\infty$$

c DISTINGUENDO UN PÒ DI CASI ($x\in[0,1)$, $x=1$, $x>1$) È FACILE TROVARE CHE $F_n\to F$ PUNTUALMENTE SU $[0,+\infty)$, F È DEFINITA DA:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{SE } 0\leq x\leq 1 \\ (\sin 1)\cdot(x-1) & \text{SE } x>1 \end{cases}$$

NOI DIMOSTREREMO DIRETTAMENTE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME.

OSSERVIAMO CHE, SE $x\in[0,1]$ SI HA:

(1) $$\left|F_n(x)-F(x)\right| = \int_0^x \sin\left(\frac{t^n}{1+t^n}\right)dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t^n}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt \leq \frac{1}{n+1}$$

SE INVECE $x>1$ SI HA

$$|F_n(x)-F(x)| = \left|\int_0^x f_n(t)\,dt - (x-1)\cdot \sin 1\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 f_n(t)\,dt + \int_1^x f_n(t)\,dt - \int_1^x \sin 1\,dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^1 f_n(t)\,dt\right| + \left|\int_1^x \left(f_n(t) - \sin 1\right)dt\right| =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 f_n(t)\,dt}_{A} + \underbrace{\int_1^x \left(\sin 1 - \sin \frac{t^n}{1+t^n}\right)dt}_{B}$$

ABBIAMO GIÀ VISTO, TRATTANDO IL CASO $x\in[0,1]$, CHE $A \leq \frac{1}{n+1}$.
VEDIAMO ORA B. SI HA:

$$B = \int_1^x \left(\sin 1 - \sin \frac{t^n}{1+t^n}\right)dt \leq$$

$$\leq \int_1^x \left|1 - \frac{t^n}{1+t^n}\right| dt =$$

VALGONO SE $n \geq 2$

$$= \int_1^x \frac{1}{1+t^n}\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^n}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,dt = \frac{1}{n-1}$$

QUINDI, SE $x>1$ E $n \geq 2$, SI HA:

(2) $$|F_n(x)-F(x)| \leq A + B \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}$$

METTENDO INSIEME (1) E (2), SI OTTIENE CHE, SE $n \geq 2$, SU $[0,+\infty)$ SI HA:

$$d(F_n,F) = \sup_{x\in[0,+\infty)} |F_n(x)-F(x)| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}$$

QUINDI $d(F_n,F) \to 0$ PER $n\to+\infty$, CIOÈ LA CONVERGENZA SU $[0,+\infty)$ È UNIFORME.

4 PREMETTIAMO CHE, ESSENDO $\cos^2(2y)$ LIPSCHITZIANA, VALE IL TEO. DI ESIST. E UNICITÀ LOCALE, QUINDI OGNI VOLTA CHE SAREMO IN GRADO DI ESIBIRE UNA SOLUZIONE PER UN CERTO y_0, QUESTA SARÀ L'UNICA.
AD ESEMPIO, PER $y_0=\frac{\pi}{4}$ È OVVIO CHE LA FUNZIONE COSTANTE $y_1(x)\equiv\frac{\pi}{4}$ È SOLUZIONE, VISTO CHE PER $y=\frac{\pi}{4}$ IL II° MEMBRO SI ANNULLA, QUINDI OLTRE A LEI NON CE NE SONO ALTRE
CERCHIAMO ORA LE SOLUZIONI $y_2(x)$ E $y_3(x)$ CON DATI INIZIALI RISPETTIVAMENTE $y_0=0$ E $y_0=\frac{\pi}{2}$, CHE SONO ENTRAMBI DEI VALORI CHE NON ANNULLANO IL II° MEMBRO. SAPPIAMO CHE OGNI SOL. $y(x)$ CON DATO INIZIALE DI QUESTO TIPO, FINCHÈ ESISTE NON INTERSECA LE SOLUZIONI COSTANTI, QUINDI SI HA SEMPRE:

$$\cos^2\left(2y(x)\right)\neq 0$$

QUINDI L'EQUAZIONE PUÒ ESSERE RISCRITTA:

$$\frac{2\,y'(x)}{\cos^2(2y(x))}=\frac{2}{1+x^2}$$

CIOÈ:

$$\left(\tan\left(2y(x)\right)\right)'=\left(2\cdot\arctan x\right)'$$

CIOÈ:

$$\tan\left(2y(x)\right)=2\cdot\arctan x+c \qquad (\text{con } c\in\mathbb{R}) \tag{3}$$

LA (3) VALE SIA PER $y_2(x)$ CHE PER $y_3(x)$.
SE ORA RICORDIAMO CHE $y_2(0)=0$, DALLA (3) RICAVIAMO:

$$\tan\left(2\cdot y_2(0)\right)=2\cdot\arctan 0+c$$

CIOÈ $c=0$.
QUINDI $y_2(x)$ SODDISFA:

$$\tan\left(2 \cdot y_2(x)\right) = 2 \cdot \arctan x$$

DA CUI, TENENDO CONTO DEL FATTO CHE $y(0)=0$ E QUINDI $-\frac{\pi}{4} < y(x) < \frac{\pi}{4}$, SEGUE:

$$y_2(x) = \frac{1}{2} \arctan\left(2 \arctan x\right)$$

LA VERIFICA DIRETTA CONFERMA CHE $y_2(x)$ È LA SOL. CERCATA PER $y_0 = 0$.

PER $y_3(x)$ PROCEDIAMO IN MODO ANALOGO: DA $y_3(0) = \frac{\pi}{2}$ SEGUE ANCORA CHE NELLA (3) SI HA $c=0$. DUNQUE $y_3(x)$ SODDISFA:

(4) $$\tan\left(2\, y_3(x)\right) = 2 \arctan x$$

STAVOLTA PERÒ, SICCOME $y_3(0) = \frac{\pi}{2}$, $y_3(x)$ È COMPRESA TRA LE 2 SOL. COSTANTI $y \equiv \frac{\pi}{4}$ E $y \equiv \frac{3}{4}\pi$. QUINDI VALE LA STIMA:

$$\frac{\pi}{2} < 2 \cdot y_3(x) < \frac{3}{2}\pi$$

E PERCIÒ, QUANDO ESPLICITO (4) RISPETTO A $y_3(x)$, STAVOLTA OTTENGO:

$$y_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan\left(2 \arctan x\right)$$

ANCHE STAVOLTA LA VERIFICA DIRETTA CONFERMA CHE $y_3(x)$ È LA SOLUZIONE CERCATA PER $y_0 = \frac{\pi}{2}$.

---

5 **a** f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ SE E SOLO SE:

(5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

SICCOME $f(x,0)$ E $f(0,y)$ SONO IDENTICAMENTE NULLE, SI HA $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$ E $f_y(0,0)=0$. PER CUI IL LIMITE DI (5) SI RISCRIVE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

CIOÈ:

(6)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{(2x^2+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

MA TALE LIMITE NON PUÒ VALERE ZERO PERCHÈ ESISTE ALMENO UNA RESTRIZIONE LUNGO LA QUALE NON VA A ZERO, AD ESEMPIO, SE $y=x>0$ DIVENTA:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3}{5x^2\cdot\sqrt{2x^2}} = \frac{2}{5\sqrt{2}} \neq 0$$

CIÒ SIGNIFICA CHE f NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

$\boxed{b}$ IN QUESTO CASO f È IDENTICAMENTE NULLA FUORI DA $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leq y<x\sqrt{x}\}$ MENTRE COINCIDE CON LA f DEL PUNTO $\boxed{a}$ SU Ω. CIÒ SIGNIFICA CHE PER VERIFICARE CHE f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ BASTA MOSTRARE CHE IL LIMITE (6) FA ZERO SE CI SI RESTRINGE A Ω.

SE $(x,y)\in\Omega$, CIOÈ SE $0\leq y<x\sqrt{x}$, SI HA

$$0\leq \frac{x^2y+xy^2}{(2x^2+3y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^3\sqrt{x}+x^4}{(2x^2+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{2x^2+3y^2}}}_{0\leq\ \cdot\ \leq\frac{1}{2}\text{ QUINDI LIMITATA}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}_{0\leq\ \cdot\ \leq 1\text{ QUINDI LIMITATA}} \cdot \underbrace{\boxed{(\sqrt{x}+x)}}_{\to 0}$$

QUESTO SIGNIFICA CHE SE $(x,y)\to(0,0)$ RIMANENDO IN Ω ALLORA IL LIMITE (6) È ZERO. QUINDI STAVOLTA f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.