ANALISI MATEMATICA 2

PROVA SCRITTA DEL 02/09/2020

1 PER OGNI $\alpha > 0$ SI CONSIDERI L'INTEGRALE IMPROPRIO:

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(x^{\frac{\alpha}{72}} + x^{\frac{65}{\alpha}}\right)\left(4 + |\alpha - 60| \ln^2 x\right)}\, dx$$

(4 PUNTI) → **a** CALCOLARE I_{60}

(4 PUNTI) → **b** DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, PER QUALI $\alpha > 0$ L'INTEGRALE I_α CONVERGE.

---

2 (7 PUNTI) DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È CONVERGENTE LA SERIE:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}{\sqrt{n} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

---

3 PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ DEFINIAMO:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n^{2n}}{(nx)^{2n-1} + 1}\right) & \text{PER } x \neq -\frac{1}{n} \\ -1 & \text{PER } x = -\frac{1}{n} \end{cases}$$

(2 PUNTI) → **a** STUDIARE CONV. PUNTUALE DI (f_n) SU $\mathbb{R}$.

(4 PUNTI) → **b** STUDIARE CONV. UNIFORME DI (f_n) SU $[-1,0)$, $[0,1]$, $(1,+\infty)$ E $[2,+\infty)$.

FACOLTATIVO → **c** DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE ESISTE $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ TALE CHE $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx \longrightarrow 0$ PER $n \to +\infty$

---

4 DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\left(\sqrt[3]{y^2} - y\right)\cdot 3}{x} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

5 PUNTI → **a** TROVARNE UNA SOLUZIONE MASSIMALE.

FACOLTATIVO → **b** TROVARNE **TUTTE** LE SOLUZIONI MASSIMALI.

---

5 PER OGNI $\alpha, \beta > 0$ SI CONSIDERI IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^6 + |x|\cdot|y|^{\alpha} + |y|^{\beta}}{x^2 + y^2}$$

5 PUNTI → **a** CALCOLARLO NEL CASO PARTICOLARE $\alpha = 1$ E $\beta = 3$

FACOLTATIVO → **b** PER QUALI VALORI DI α E β IL LIMITE ESISTE?

SOLUZIONI

$\boxed{1}$ $\boxed{b}$ DETTA $f_\alpha(x)$ LA FUNZIONE INTEGRANDA PONIAMO:

$$A_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(x)\,dx \quad \text{E} \quad B_\alpha = \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

COSICCHÈ I_α CONVERGE SE E SOLO SE CONVERGONO SIA A_α CHE B_α.

PER STUDIARE LA CONVERGENZA DISTINGUIAMO 5 CASI:

$0<\alpha<65$, $\alpha=65$, $65<\alpha<72$, $\alpha=72$, $\alpha>72$.

$\boxed{\text{I° CASO}}$ $\boxed{0<\alpha<65}$ (CONVERGE)

PER $x \in (0,1]$ SI HA:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\left(x^{\frac{\alpha}{72}} + x^{\frac{65}{\alpha}}\right)\left(4+|\alpha-60|\ln^2 x\right)} < \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{72}}}$$

QUINDI A_α CONVERGE PERCHÈ $\frac{\alpha}{72}<1$.

ANALOGAMENTE PER $x \geq 1$ SI HA:

$$f_\alpha(x) < \frac{1}{x^{\frac{65}{\alpha}}}$$

QUINDI B_α CONVERGE PERCHÈ $\frac{65}{\alpha}>1$.

QUINDI, QUANDO $0<\alpha<65$, $I_\alpha = A_\alpha + B_\alpha$ CONVERGE.

$\boxed{\text{II° CASO}}$ $\boxed{\alpha=65}$ (CONVERGE)

INFATTI:

$$f_{65}(x) = \frac{1}{\left(x^{\frac{65}{72}} + x\right)\left(4+5\ln^2 x\right)} \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{5x\ln^{\overset{>1}{2}} x} & \text{PER } x \to +\infty \\[2ex] \dfrac{1}{5x^{\underset{<1}{\frac{65}{72}}}\ln^2 x} & \text{PER } x \to 0^+ \end{cases}$$

QUINDI SIA A_{65} CHE B_{65} CONVERGONO PER CONFRONTO ASINTOTICO.

$\boxed{\text{III° CASO}}$ $\boxed{65 < \alpha < 72}$ (DIVERGE A $+\infty$)

BASTA MOSTRARE CHE B_α DIVERGE A $+\infty$.

SICCOME SIA $\frac{\alpha}{72}$ CHE $\frac{65}{\alpha}$ SONO MINORI DI 1, SI AVRÀ:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\left(x^{\frac{\alpha}{72}} + x^{\frac{65}{\alpha}}\right)\left(4 + |\alpha - 60| \ln^2 x\right)} \approx \frac{C}{x^\gamma \ln^2 x} \quad \text{PER } x \to +\infty$$

CON $C > 0$ E $0 < \gamma < 1$.

QUINDI B_α DIVERGE PER CONFRONTO ASINTOTICO.

$\boxed{\text{IV CASO}}$ $\boxed{\alpha = 72}$ (CONVERGE)

SI HA:

$$f_{72}(x) = \frac{1}{\left(x + x^{\frac{65}{72}}\right)\left(4 + 12 \ln^2 x\right)}$$

PER CUI LA VERIFICA CHE A_{72} E B_{72} CONVERGONO È DEL TUTTO ANALOGA AL CASO $\alpha = 65$.

$\boxed{\text{V CASO}}$ $\boxed{\alpha > 72}$ (CONVERGE)

PER $x \in (0,1]$ SI HA $f_\alpha(x) < \frac{1}{x^{\frac{65}{\alpha}}}$, QUINDI A_α CONVERGE PERCHÉ $\frac{65}{\alpha} < 1$.

PER $x \geq 1$ SI HA $f_\alpha(x) < \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{72}}}$, QUINDI B_α CONVERGE PERCHÉ $\frac{\alpha}{72} > 1$.

QUINDI, PER $\alpha > 72$, $I_\alpha = A_\alpha + B_\alpha$ CONVERGE.

CONCLUDENDO: I_α DIVERGE A $+\infty$ PER $\alpha \in (65, 72)$, MENTRE INVECE CONVERGE PER $\alpha \in (0, 65] \cup [72, +\infty)$.

$\boxed{\text{a}}$ SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE I_{60} CONVERGE NON C'E' BISOGNO DI CALCOLARE SEPARATAMENTE A_{60} E B_{60} MA SI PUÒ DIRE

DIRETTAMENTE CHE:

$$I_{60} = \lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{1}{b}}^{b} f_{60}(x)\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{1}{\left(x^{\frac{60}{72}} + x^{\frac{65}{60}}\right)\left(4 + 0\cdot \ln^2 x\right)}\,dx =$$

$\boxed{x = \varphi(t) = t^{12}}$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{1}{\left(\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[12]{x^{13}}\right)\cdot 4}\,dx =$$

$\boxed{\text{PONGO } c = \sqrt[12]{b}}$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{1}{\sqrt[12]{b}}}^{\sqrt[12]{b}} \frac{12\,t^{11}}{\left(t^{10} + t^{13}\right)\cdot 4}\,dt =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_{\frac{1}{c}}^{c} \frac{3t}{t^3+1}\,dt =$$

$$\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} =$$

$$= \frac{At^2 - At + A + Bt^2 + Bt + Ct + C}{(t^3+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)t^2 + (-A+B+C)t + (A+C)}{t^3+1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=3 \\ A+C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_{\frac{1}{c}}^{c} \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1}\right)dt =$$

$$\frac{t+1}{t^2-t+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{2}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_{\frac{1}{c}}^{c} \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{2}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)dt =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[-\ln(t+1) + \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)\right]_{\frac{1}{c}}^{c} + \left[\sqrt{3}\cdot\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{c}}^{c} =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\ln\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t+1}\right]_{\frac{1}{c}}^{c} + \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{c}}^{c} =$$

$$= \ln 1 - \ln 1 + \sqrt{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

2 PER COMODITÀ DI ESPOSIZIONE PONIAMO:

$$b(n)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi\cdot n\right) \quad \text{E} \quad \beta(n)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)$$

IN TAL MODO LA NOSTRA SERIE SI SCRIVE:

(1) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(n)}{\sqrt{n}+\beta(n)}$$

OSSERVIAMO CHE VALGONO LE PROPRIETÀ:

(2) PER OGNI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ SI HA $b(n)+b(n+1)+b(n+2)=0$

(3) PER OGNI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ SI HA $b(n)=b(n+3)$

BASTA FARE I CALCOLI RICORDANDO CHE $b(n)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)$

DI CONSEGUENZA, POSTO:

$$S_n=b(1)+b(2)+\dots+b(n),$$

SI OTTIENE CHE (S_n) È PERIODICA DI PERIODO 3, PERCHÉ:

$$S_{n+3}=S_n+b(n+1)+b(n+2)+b(n+3)=S_n+0=S_n$$

IN PARTICOLARE (S_n) È LIMITATA QUINDI, PER IL CRIT. DI ABEL, È CONVERGENTE LA SERIE:

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(n)}{\sqrt{n}}$$

GRAZIE AL FATTO CHE (4) CONVERGE, IL CARATTERE DI (1) COINCIDE CON QUELLO DI:

(5) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{b(n)}{\sqrt{n}+\beta(n)}-\frac{b(n)}{\sqrt{n}}\right)$$

CHE, RISCRITTA MEGLIO, DIVENTA:

(6) $$\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{b(n)\beta(n)}{n+\sqrt{n}\cdot\beta(n)}$$

ORA, COSÌ COME SI È DIMOSTRATO CHE $b(n)$ SODDISFA (2) E (3), IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI TROVA CHE $\beta(n)$ SODDISFA:

(7) PER OGNI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ SI HA $\beta(n)+\beta(n+1)+\beta(n+2)+\beta(n+3)=0$

(8) PER OGNI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ SI HA $\beta(n)=\beta(n+4)$

DA (3) E (8) SEGUE SUBITO CHE:

(9) PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ SI HA $b(n)\beta(n) = b(n+12)\beta(n+12)$

INVECE, USANDO ANCHE (2) E (7), SI RIESCE A DIMOSTRARE CHE:

(10) PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ SI HA $b(n)\beta(n)+b(n+1)\beta(n+1)+b(n+2)\beta(n+2)+\dots+b(n+11)\beta(n+11)=0$

PER DIMOSTRARE (10), GRAZIE A (9) BASTA FARLO NEL CASO $n=1$. SI HA:

$$
\begin{aligned}
& b(1)\beta(1)+b(2)\beta(2)+\dots+b(12)\beta(12)= \\
&= b(1)\big(\beta(1)+\beta(4)+\beta(7)+\beta(10)\big)+ \\
&\quad + b(2)\big(\beta(2)+\beta(5)+\beta(8)+\beta(11)\big)+ \\
&\quad + b(3)\big(\beta(3)+\beta(6)+\beta(9)+\beta(12)\big) =
\end{aligned}
$$

GRAZIE AL FATTO CHE

$b(n)=b(n+3)$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$

$$
\begin{aligned}
&= b(1)\cdot\big(\beta(1)+\beta(4)+\beta(3)+\beta(2)\big)+ \\
&\quad + b(2)\big(\beta(2)+\beta(1)+\beta(4)+\beta(3)\big)+ \\
&\quad + b(3)\big(\beta(3)+\beta(2)+\beta(1)+\beta(4)\big) =
\end{aligned}
$$

GRAZIE AL FATTO CHE $\beta(n)=\beta(n+4)$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$

GRAZIE A (7)

$$= b(1)\cdot 0 + b(2)\cdot 0 + b(3)\cdot 0 = 0$$

QUESTO DIMOSTRA (10).

COME CONSEGUENZA DI (9) E (10), POSTO:

$$S_n = b(1)\beta(1)+b(2)\beta(2)+\dots+b(n)\beta(n)$$

SI OTTIENE CHE (S_n) È PERIODICA DI PERIODO 12 PERCHÈ:

$$
\begin{aligned}
S_{n+12} &= S_n + b(n+1)\beta(n+1)+\dots+b(n+12)\beta(n+12) = \\
&= S_n + 0 = S_n
\end{aligned}
$$

IN PARTICOLARE, DUNQUE, (S_n) È LIMITATA, QUINDI POSSO APPLICARE IL CRITERIO DI ABEL ALLA SERIE:

(11)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)\,\beta(n)}{n}$$

OTTENENDO CHE CONVERGE.

GRAZIE AL FATTO CHE (11) CONVERGE, IL CARATTERE DI (6) È UGUALE A QUELLO DI:

(12)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{b(n)\beta(n)}{n+\sqrt{n}\,\beta(n)}+\frac{b(n)\beta(n)}{n}\right)$$

CHE, RISCRITTA MEGLIO, DIVENTA:

(13)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)\cdot(\beta(n))^2}{n(\sqrt{n}+\beta(n))}$$

MA LA (13) CONVERGE ASSOLUTAMENTE PERCHÉ:

$$\left|\frac{b(n)\cdot(\beta(n))^2}{n(\sqrt{n}+\beta(n))}\right| \leq \frac{1}{n(\sqrt{n}+\beta(n))} \approx \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

QUINDI (13) CONVERGE, QUINDI CONVERGE ANCHE (6) E, DI CONSEGUENZA, ANCHE LA SERIE INIZIALE.

---

3 a) PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ SI HA:

PERCHÉ DEF. IN n SI HA $x \neq -\frac{1}{n}$

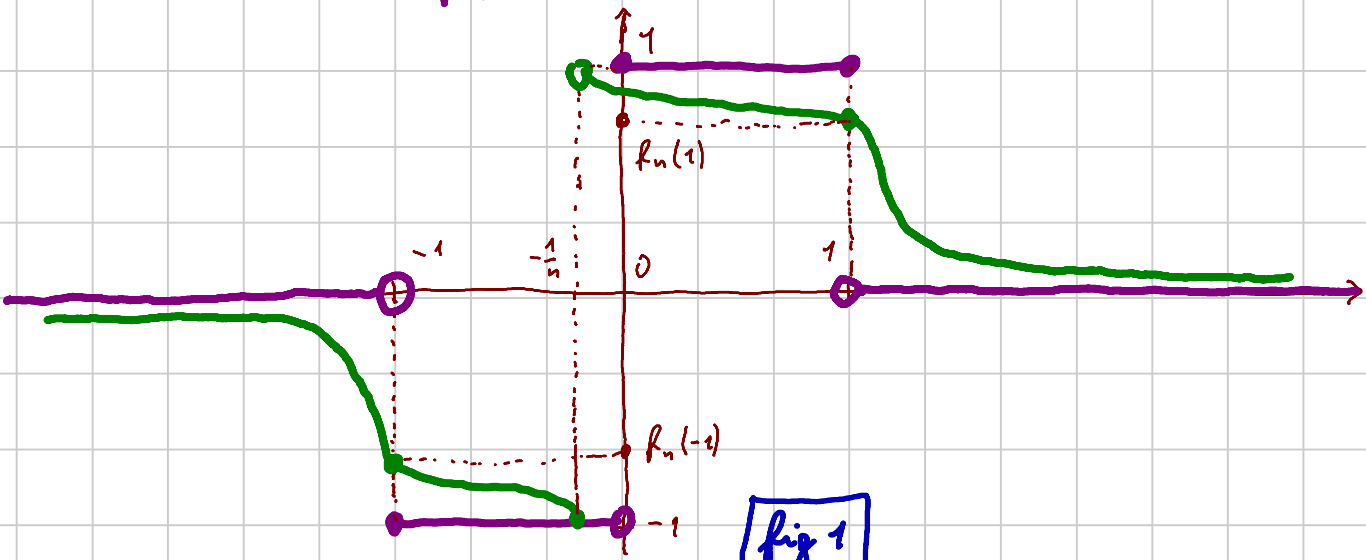
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n^{2n}}{(nx)^{2n-1}+1}\right) =$$

$$= \begin{cases} \overset{x=0}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\arctan\left(n^{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1 \\ \overset{x\neq 0}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{n}{x^{2n-1}}\right) = \begin{cases} = 0 & \text{SE } |x|>1 \\ = 1 & \text{SE } 0<x\leq 1 \\ = -1 & \text{SE } -1\leq x<0 \end{cases} \end{cases}$$

QUINDI $f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$ DOVE:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{PER } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{PER } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

I GRAFICI DI f E f_n SONO I SEGUENTI:



$\boxed{fig\ 1}$

DOVE LA MONOTONIA DI f_n SU $\left(-\infty, -\frac{1}{n}\right]$ E SU $\left(-\frac{1}{n}, +\infty\right)$ PUÒ ESSERE RICAVATA SIA VERIFICANDO CHE PER OGNI $x \neq -\frac{1}{n}$ SI HA $f_n'(x) < 0$, SIA MOSTRANDO CHE, SU CIASCUNA SEMIRETTA, f_n È COMPOSIZIONE DI FUNZIONI MONOTONE.

$\boxed{b}$ SU $[-1, 0)$, TENENDO PRESENTE LA $\boxed{fig\ 1}$, SI HA:

$$\sup_{-1 \leq x < 0} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x \to -\frac{1}{n}^+} \left(f_n(x) - f(x)\right) = 1 - (-1) = 2 \not\to 0$$

QUINDI $f_n \not\to f$ UNIFORMEMENTE SU $[-1, 0)$.

PER GLI ALTRI INTERVALLI, SEMPRE USANDO LA $\boxed{fig\ 1}$, SI HA:

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(1) - f(1)| = 1 - f_n(1) \xrightarrow{\text{PER } n \to +\infty} 1 - f(1) = 0$$

$$\sup_{x > 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x > 1} |f_n(x) - 0| = \lim_{x \to 1^+} f_n(x) = f_n(1) \xrightarrow{\text{PER } n \to +\infty} f(1) = 1$$

$$\sup_{x \geq 2} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 2} |f_n(x) - 0| = f_n(2) \xrightarrow{\text{PER } n \to +\infty} f(2) = 0$$

QUINDI $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SU $[0, 1]$ E SU $[2, +\infty)$ MA NON SU $(1, +\infty)$.

$\boxed{b}$ SEMPRE ISPIRANDOCI ALLA $\boxed{\text{fig } 1}$ ABBIAMO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \int_{-\frac{1}{n}}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} -f_n(x)\, dx}_{A(n)} + \underbrace{\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} (f_n(x) + 1)\, dx}_{B(n)} + \underbrace{\int_{-\frac{1}{n}}^{0} (f_n(x)+1)\, dx}_{C(n)} + \underbrace{\int_{0}^{1} 1 - f_n(x)\, dx}_{D(n)} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f_n(x)\, dx}_{E(n)}$$

MOSTRIAMO CHE I SINGOLI PEZZI SONO INFINITESIMI PER $n \to +\infty$:

$$0 \leq C(n) = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} f_n(x) + 1\, dx \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{0} 2\, dx = 2 \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$0 \leq B(n) = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} f_n(x) + 1\, dx \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} f_n(-1) - f(-1)\, dx = \left(f_n(-1) - f(-1)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0 \cdot 1 = 0$$

$$0 \leq D(n) = \int_{0}^{1} 1 - f_n(x)\, dx \leq \int_{0}^{1} (f(1) - f_n(1))\, dx = (f_n(1) - f(1)) \cdot 1 \longrightarrow 0$$

$$0 \leq E(n) = \int_{1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \arctan \frac{n^{2n}}{(nx)^{2n-1} + 1}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{1}^{+\infty} \arctan \frac{n}{x^{2n-1} + \frac{1}{n^{2n-1}}}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_{1}^{+\infty} \arctan \frac{n}{x^n}\, dx \overset{x = \sqrt[n]{n} \cdot t}{=} \frac{2}{\pi} \sqrt[n]{n} \int_{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}^{+\infty} \arctan \frac{1}{t^n}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \sqrt[n]{n} \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}^{1} \frac{\pi}{2}\, dt + \frac{2}{\pi} \sqrt[n]{n} \cdot \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^n}\, dt =$$

$$= (\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{2}{\pi} \sqrt[n]{n} \cdot \left[\frac{-1}{(n-1)\, t^{n-1}}\right]_{1}^{+\infty} = \sqrt[n]{n} - 1 + \frac{2\sqrt[n]{n}}{\pi (n-1)} \longrightarrow 0$$

$$0 \le A(n) = \int_{-\infty}^{-1} -\frac{2}{\pi} \arctan \frac{n^{2n}}{(nx)^{2n-1}+1}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \arctan \frac{n}{x^{2n-1} - \frac{1}{n^{2n-1}}}\, dx \le$$

SE $n \ge 2$

$$\le \frac{2}{\pi}\cdot \int_{1}^{+\infty} \arctan \frac{2n}{x^{2n-1} + \frac{1}{n^{2n-1}}}\, dx \le \frac{4}{\pi}\int_{1}^{+\infty} \arctan \frac{n}{x^{2n-1}+\frac{1}{n^{2n-1}}}\, dx = 2\,E(n) \to 0$$

PERCHÉ $\arctan 2\alpha < 2\cdot\arctan\alpha$ SE $\alpha > 0$

QUINDI, SE f È LA FUNZIONE A CUI f_n CONVERGE PUNTUALMENTE, ALLORA, PER $n \to +\infty$ SI HA:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0$$

$\boxed{4}$ $\boxed{a}$ PER $x > 0$ L'EQUAZIONE, OLTRE ALLE 2 SOL. COSTANTI $y_0 \equiv 0$ E $y_1 \equiv 1$, HA LE SOL. CHE SI OTTENGONO SEPARANDO LE VARIABILI:

$$\frac{y'(x)}{3\left(\sqrt[3]{y^2(x)} - y(x)\right)} = \frac{1}{x}$$

CIOÈ:

$$-\frac{1}{1-\sqrt[3]{y(x)}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2(x)}} \cdot y'(x) = -\frac{1}{x}$$

CIOÈ:

$$\left(\ln\left|1-\sqrt[3]{y(x)}\right|\right)' = \left(-\ln x\right)'$$

CIOÈ:

$$\ln\left|1-\sqrt[3]{y(x)}\right| = c - \ln x \qquad \text{CON } c \in \mathbb{R}.$$

CIOÈ:

$$1-\sqrt[3]{y(x)} = \pm e^{c}\cdot\frac{1}{x} \qquad \text{CON } c\in\mathbb{R}$$

CIOÈ:

(1) $$y(x) = \left(1-\frac{k}{x}\right)^3 \qquad \text{CON } k\in\mathbb{R}$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE LA (1) SODDISFA L'EQUAZIONE SU $(0,+\infty)$ PER OGNI $k\in\mathbb{R}$.

AFFINCHÉ LA (1) SODDISFI ANCHE IL DATO INIZIALE $y(1)=-1$ BISOGNA CHE:

$$-1 = y(1) = \left(1-\frac{k}{1}\right)^3 = (1-k)^3$$

CHE EQUIVALE A DIRE $k=2$.

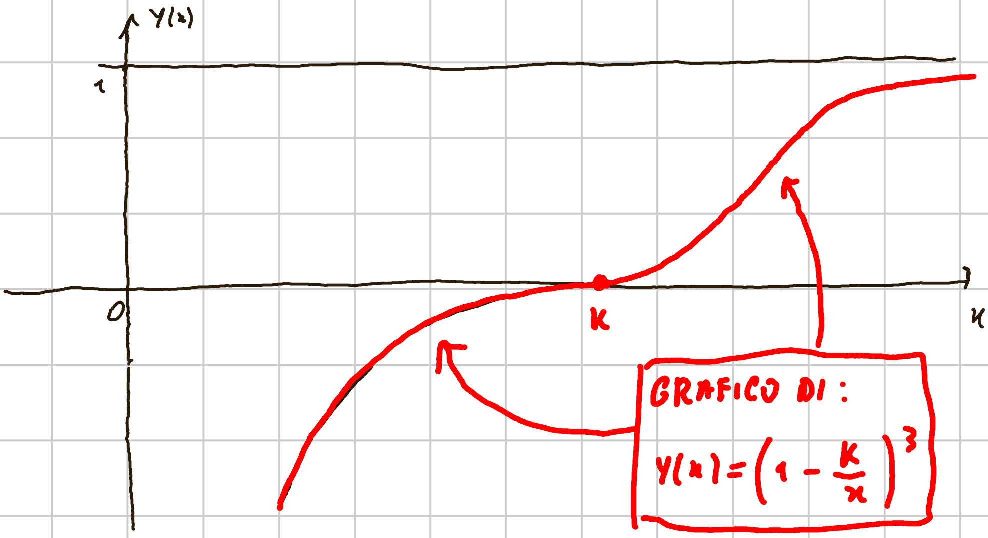
PER $k=2$ LA (1) DIVENTA:

(2) $$y(x) = \left(1-\frac{2}{x}\right)^3$$

QUINDI UNA SOL. MASSIMALE DEL PROB. DI CAUCHY È $\left(y(x), (0,+\infty)\right)$ CON $y(x)$ DATO DA (2).

$\boxed{b}$ SICCOME $3\left(\sqrt[3]{y^2}-y\right)$ NON È LOCALMENTE LIPSCHITZIANA, LA SOL. TROVATA PER IL PROB. DI CAUCHY POTREBBE NON ESSERE L'UNICA.

PER TROVARE LE ALTRE OSSERVIAMO IL GRAFICO DI (2):



IN PARTICOLARE SI OSSERVI CHE PER OGNI FISSATO $k>0$,

LA (2) HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

(3) $\lim_{x\to 0^+} y(x) = -\infty$

(4) $\lim_{x\to +\infty} y(x) = 1$

(5) $y(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE E INTERSECA L'ASSE x PER $x=k$.

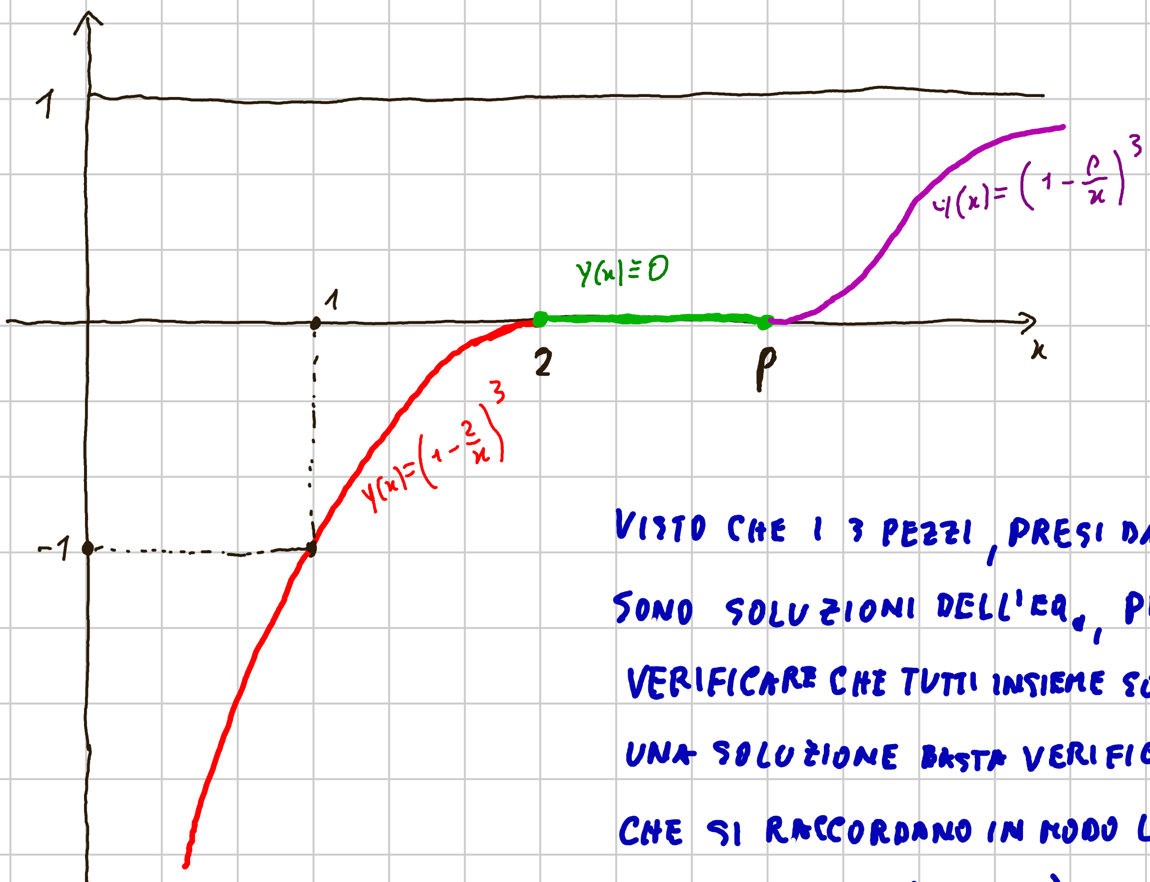
(6) NEL PUNTO $x=k$ LA $y(x)$ HA UN FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE.

GRAZIE A QUESTE PROPRIETÀ E AL FATTO CHE ANCHE LA FUNZIONE COSTANTE $y_0(x)\equiv 0$ SODDISFA L'EQUAZIONE POSSIAMO COSTRUIRE INFINITE SOL. DEL PROB. DI CAUCHY NEL MODO SEGUENTE:

PER OGNI $\rho \geq 2$ SIA:

(7)
$$y_\rho(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{2}{x}\right)^3 & \text{PER } 0<x\leq 2 \\ 0 & \text{PER } 2<x<\rho \\ \left(1-\frac{\rho}{x}\right)^3 & \text{PER } x\geq\rho \end{cases}$$

È FACILE VERIFICARE CHE PER OGNI $\rho\geq 2$, $y_\rho(x)$ È SOL. DEL PROB. DI CAUCHY. IL GRAFICO DI $y_\rho(x)$ È IL SEGUENTE:



VISTO CHE I 3 PEZZI, PRESI DA SOLI SONO SOLUZIONI DELL'EQ., PER VERIFICARE CHE TUTTI INSIEME SONO UNA SOLUZIONE BASTA VERIFICARE CHE SI RACCORDANO IN MODO LISCIO. (VERIFICA CHE È OVVIA)

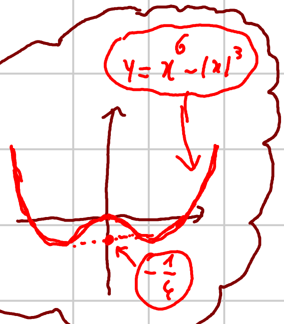
OLTRE A QUELLE DATE DA (7) NON CI SONO ALTRE SOLUZIONI PER IL PROBLEMA DI CAUCHY PERCHÉ È SOLO NEI PUNTI DELL'ASSE x CHE VIENE MENO IL TEOREMA DI UNICITÀ.

---

5 **a** MOSTRIAMO CHE:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^6+|x|\cdot|y|+|y|^3}{x^2+y^2} = +\infty$$

PERCHÉ:



VALGONO LE STIME:

$$\frac{x^6+|x|\cdot|y|+|y|^3}{x^2+y^2} \geq \frac{x^6+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^6-|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \geq \frac{-\frac{1}{4}}{x^2+y^2} + \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$$

QUINDI, POICHÉ $\frac{-\frac{1}{4}}{x^2+y^2} \to 0$ PER $(x,y)\to\infty$, BASTERÀ MOSTRARE CHE:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \infty$$

COSA CHE È OVVIA VISTO CHE $\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$ È POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO 1 ED HA UN MINIMO STRETTAMENTE POSITIVO SULLA CIRCONFERENZA UNITARIA.

a (MODO ALTERNATIVO)

SICCOME FACCIAMO IL LIMITE PER $(x,y)\to\infty$ POSSIAMO SEMPRE SUPPORRE CHE SIA $x^2+y^2\geq 1$. DI CONSEGUENZA, PASSANDO IN COORDINATE POLARI, SI HA:

$$\frac{x^6+|x||y|+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^6\cos^6\theta+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|+\rho^3|\sin\theta|^3}{\rho^2} \geq$$

DOVE SI È POSTO $x=\rho\cos\theta$ E $y=\rho\sin\theta$

$$\geq \rho\cdot\left(\rho^3\cos^6\theta+|\sin\theta|^3\right) \geq$$

DOVE $M=\min\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} \cos^6\theta+|\sin\theta|^3$ ED $M>0$ PER T. DI WEIERSTRASS

PERCHÉ $x^2+y^2\geq 1$

$$\geq \rho\left(\cos^6\theta+|\sin\theta|^3\right) \geq \rho\cdot M = M\sqrt{x^2+y^2}$$

QUINDI SI OTTIENE LA TESI PERCHÉ $M\cdot\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty$ PER $(x,y)\to\infty$.

b RESTRINGENDOSI ALL'ASSE X, QUALSIASI SIANO α E β, SI HA COMUNQUE:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ \{y=0\}}} \frac{x^6+|x|\cdot|y|^\alpha+|y|^\beta}{x^2+y^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty .$$

QUINDI CHIEDERE QUANDO IL LIMITE ESISTE EQUIVALE A CHIEDERE QUANDO VALE $+\infty$.

MOSTRIAMO CHE QUESTO ACCADE SE E SOLO SE $\beta>2$, INDIPENDENTEMENTE DAI VALORI DI α.

SE $0<\beta\leq 2$, INFATTI, QUALUNQUE SIA IL VALORE DI α, RESTRINGENDOSI ALL'ASSE Y SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ \{x=0\}}} \frac{x^6+|x|\cdot|y|^\alpha+|y|^\beta}{x^2+y^2} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{|y|^{2-\beta}} = \begin{cases} =0 & \text{SE } 0<\beta<2 \\ =1 & \text{SE } \beta=2 \end{cases}$$

QUINDI SE $0<\beta\leq 2$ IL LIMITE RICHIESTO NON PUÒ VALERE $+\infty$.

INVECE, SE $\beta>2$, COMUNQUE SI PRENDA $\alpha>0$, SI HA:

$$\frac{x^6+|x|\cdot|y|^\alpha+|y|^\beta}{x^2+y^2} \geq \frac{x^6+|y|^\beta}{x^2+y^2}$$

PASSANDO IN COORDINATE POLARI $x=\rho\cos\theta$ E $y=\rho\sin\theta$, SI OTTIENE:

(1) $$\frac{x^6+|y|^\beta}{x^2+y^2} = \frac{\rho^6\cos^6\theta+\rho^\beta|\sin\theta|^\beta}{\rho^2} = \begin{cases} =\rho^{\beta-2}\left(\rho^{6-\beta}\cos^6\theta+|\sin\theta|^\beta\right) & \text{SE } 6\geq\beta \\ =\rho^{6-2}\left(\cos^6\theta+\rho^{\beta-6}|\sin\theta|^\beta\right) & \text{SE } \beta>6 \end{cases}$$

MA, VISTO CHE $(x,y)\to\infty$, POSSIAMO SUPPORRE $x^2+y^2\geq 1$, QUINDI $\rho^{6-\beta}\geq 1$ SE $6\geq\beta$ E $\rho^{\beta-6}\geq 1$ SE $\beta\geq 6$, E PERCIÒ LA (1) DIVENTA:

$$\frac{x^6+y^\beta}{x^2+y^2} \geq \begin{cases} \geq \rho^{\beta-2}\cdot\left(\cos^6\theta+|\sin\theta|^\beta\right) & \text{SE } 6\geq\beta \\ \geq \rho^{6-2}\cdot\left(\cos^6\theta+|\sin\theta|^\beta\right) & \text{SE } \beta>6 \end{cases}$$

QUINDI IN OGNI CASO OTTENIAMO UNA DISUGUAGLIANZA DEL TIPO

$$\frac{x^6+|y|^\beta}{x^2+y^2} \geq \rho^\gamma \cdot M$$

DOVE $\gamma>0$ E $M=\min\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi}\left(\cos^6\theta+|\sin\theta|^\beta\right)>0$.

A QUESTO PUNTO LA TESI SEGUE DAL FATTO CHE PER $(x,y)\to\infty$ SI ABBIA $\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty$, CIOÈ $\rho\to+\infty$.