ANALISI MATEMATICA 2

PROVA SCRITTA DEL 25/01/2021

1 PER OGNI $x>0$ DEFINIAMO $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ DOVE $f(t)=t\cos\frac{1}{t}$.

a TROVARE $\alpha>0$ TALE CHE $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^\alpha}=\ell\in\mathbb{R}-\{0\}$

b DIRE QUANTE SONO LE SOLUZIONI STRETTAMENTE POSITIVE DELL' EQUAZIONE $F(x)=x$.

---

2 PER OGNI INTERO $n\geq 4$ PONIAMO $a_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} x\,dx$. STUDIARE IL CARATTERE DELLE SERIE:

a $\sum_{n=4}^{+\infty} a_n$

b $\sum_{n=4}^{+\infty} (-1)^n a_n$

FACOLTATIVO → **c** $\sum_{n=4}^{+\infty} (-1)^n b_n$ DOVE $b_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \sqrt{x^2+(-1)^n}\,dx$

---

3 SIA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ DEFINITA DA $f(x)=\chi_{[0,+\infty)}(x)\cdot\cos(x^2)$. PER OGNI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ DEFINIAMO $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ PONENDO $f_n(x)=f\left(x+\frac{\sin n}{n}\right)$.
DELLA SUCCESSIONE (f_n) SI STUDI LA CONVERGENZA:

a PUNTUALE

b UNIFORME SU $(0,1]$ E $[1,100]$.

FACOLTATIVO → **c** UNIFORME SU $[1,+\infty)$.

---

4 DATA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

(*) $$y'' - 3y' + 2y = 10\cos x + e^x$$

a TROVARE TUTTE LE SUE SOLUZIONI

b TRA TUTTE LE EQ. DIFF. OMOGENEE A COEFF. COSTANTI REALI IL CUI INSIEME DELLE SOLUZIONI CONTIENE QUELLO DI (*) TROVARE QUELLA DI ORDINE MINIMO.

---

5 DATA:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^4}{x^8 + y^6} & \text{PER } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

STUDIARNE IN $(0,0)$ LA CONTINUITÀ E LA DIFFERENZIABILITÀ.

SOLUZIONI

1 **a** PER COMINCIARE OSSERVIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ PERCHÉ È UGUALE A $\int_0^{+\infty} t\cos\frac{1}{t}\,dt$ E QUESTO HA LO STESSO CARATTERE DI $\int_0^{+\infty} t\,dt$ IN QUANTO $t\cos\frac{1}{t} \simeq t$ PER $t\to+\infty$.

MA ALLORA IL LIMITE RICHIESTO È DELLA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$ E SI PUÒ USARE IL T. DI DE L'H. SI HA:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-2}} = \begin{cases} +\infty & \text{SE } \alpha<2 \\ \frac{1}{2} & \text{SE } \alpha=2 \\ 0 & \text{SE } \alpha>2 \end{cases}$$

QUINDI IL LIMITE È FINITO E NON NULLO SOLO PER $\alpha=2$.

b PER OGNI $x>0$ VALE LA STIMA:

$$F(x) = \int_0^x t\cdot\cos\frac{1}{t}\,dt \le \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

POICHÉ PER $0<x<2$ SI HA $\frac{x^2}{2}<x$, A MAGGIOR RAGIONE SI HA:

(1) $$F(x)<x \quad \text{SE} \quad 0<x<2.$$

D'ALTRA PARTE, GRAZIE AL PUNTO **a** ABBIAMO:

$$F(x) \simeq \frac{x^2}{2} \quad \text{PER } x\to+\infty$$

QUINDI:

(2) $$F(x) > x \quad \text{DEFINITIVAMENTE PER } x\to+\infty$$

COMBINANDO (1) E (2) COL FATTO CHE $F(x)$ È CONTINUA

OTTENIAMO CHE $F(x)=x$ HA ALMENO UNA SOLUZIONE SU $[2,+\infty)$ MA NESSUNA SU $(0,2)$.

TUTTAVIA NON PUÒ AVERNE PIÙ DI UNA SU $[2,+\infty)$ PERCHÉ SU TALE INTERVALLO $F(x)-x$ È STRETTAMENTE CRESCENTE IN QUANTO, PER $x\geq 2$ SI HA:

$$\left(F(x)-x\right)'=x\cos\frac{1}{x}-1\underset{\text{PERCHÉ } x\geq 2}{\geq}2\cdot\cos\frac{1}{2}-1\underset{\text{PERCHÉ } 0<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4}}{>}2\cdot\cos\frac{\pi}{4}-1=\sqrt{2}-1>0$$

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $F(x)=x$ HA ESATTAMENTE UNA SOL. POSITIVA.

$\boxed{2}$ $\boxed{a}$ POSTO $S_n=a_4+a_5+\dots+a_n$ MOSTRIAMO CHE $S_n\to+\infty$, PER $n\to+\infty$. INFATTI SI HA:

$$S_n=a_4+a_5+\dots+a_n=$$
$$=\int_{\ln 4}^{\ln 5}x\,dx+\int_{\ln 5}^{\ln 6}x\,dx+\dots+\int_{\ln n}^{\ln(n+1)}x\,dx=$$
$$=\int_{\ln 4}^{\ln(n+1)}x\,dx$$

QUINDI:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\int_{\ln 4}^{\ln(n+1)}x\,dx=\int_{\ln 4}^{+\infty}x\,dx=+\infty$$

E QUESTO, PER DEFINIZIONE, SIGNIFICA CHE $\sum a_n$ DIVERGE.

$\boxed{b}$ PER APPLICARE IL CR. DI LEIBNIZ, DOBBIAMO VERIFICARE 2 COSE:

(6) $$\lim_{n\to+\infty}a_n=0$$

(7) (a_n) È DECRESCENTE.

COMINCIAMO DA (6). SI HA:

$$0 < a_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} x \, dx < \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \ln(n+1) \, dx = \left(\ln(n+1) - \ln n\right) \cdot \ln(n+1) =$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ln(n+1) \approx \frac{\ln(n+1)}{n} \to 0 \quad \text{PER } n \to +\infty$$

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO, ANCHE $a_n \to 0$.

PASSIAMO A (7).

BASTERÀ MOSTRARE CHE È DECRESCENTE LA FUNZIONE:

$$G(t) = \int_{\ln t}^{\ln(t+1)} x \, dx$$

SI HA:

$$G'(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1} - \frac{\ln t}{t}$$

QUINDI, PER MOSTRARE CHE $G'(t) < 0$, BASTA VERIFICARE CHE È DECRESCENTE LA FUNZIONE $H(s) = \frac{\ln s}{s}$. SI HA:

$$H'(s) = \frac{\frac{1}{s} \cdot s - 1 \cdot \ln s}{s^2} = \frac{1 - \ln s}{s^2} > 0$$

SE $s > e$

QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE ANCHE $G(t)$ È DECRESCENTE, DA CUI SEGUE (7), VISTO CHE $a_n = G(n)$.

GRAZIE A (6) E (7) POSSIAMO QUINDI APPLICARE IL CRIT. DI LEIBNIZ E CONCLUDERE CHE $\sum (-1)^n a_n$ CONVERGE.

$\boxed{C}$ SICCOME $\sum(-1)^n a_n$ CONVERGE, SOTTRAENDOLA A $\sum (-1)^n b_n$ NON NE CAMBIA IL CARATTERE, QUINDI BASTERÀ TROVARE

IL CARATTERE DI:

(8)
$$\sum_{n=4}^{+\infty} (-1)^n (b_n - a_n).$$

POSTO

$$c_n = (-1)^n (b_n - a_n)$$

MOSTRIAMO CHE

(9)
$$c_n > \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{1}{3x}\, dx$$

RICORDANDO SEMPRE CHE $n \geq 4$, SE n È PARI, SI HA:

$$c_n = (-1)^n \left(\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \sqrt{x^2 + (-1)^n}\, dx - \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} x\, dx \right) = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) dx =$$

$$= \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\, dx > \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{1}{x+1+x}\, dx > \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{1}{3x}\, dx$$

SE INVECE n È DISPARI, SI HA:

$$c_n = -\left(\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \sqrt{x^2-1}\, dx - \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} x\, dx \right) = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \left(x - \sqrt{x^2-1} \right) dx =$$

$$= \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\, dx > \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{1}{x+x}\, dx > \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{1}{3x}\, dx$$

QUINDI LA STIMA (9) VALE PER OGNI INTERO $n \geq 4$.

CONSEGUENZA IMMEDIATA DI (9) È CHE (8) È UNA SERIE A TERMINI POSITIVI.

MOSTRIAMO ORA CHE (8) DIVERGE. POSTO $S_n = c_4 + c_5 + \dots + c_n$ SI HA:

$$S_n = c_4 + c_5 + \dots + c_n >$$

$$> \int_{\ln 4}^{\ln 5} \frac{1}{3x}\,dx + \int_{\ln 5}^{\ln 6} \frac{1}{3x}\,dx + \dots + \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{1}{3x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\ln 4}^{\ln(n+1)} \frac{1}{x}\,dx \longrightarrow \frac{1}{3} \int_{\ln 4}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO, SI HA:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$$

E CIÒ SIGNIFICA CHE LA SERIE (8) DIVERGE.
MA ALLORA ANCHE $\sum (-1)^n b_n$ DIVERGE, PERCHÉ HA LO STESSO CARATTERE DI (8).

$\boxed{3}$ $\boxed{a}$ PER $x \neq 0$ $f(x)$ È CONTINUA, QUINDI:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} f\left(x + \frac{\sin n}{n}\right) = f(x).$$

INVECE PER $x = 0$ IL LIMITE NON ESISTE PERCHÉ, SE INDICHIAMO CON (a_k) LA SOTTOSUCCESSIONE COSTITUITA DAI TERMINI POSITIVI DI $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$ E CON (b_k) QUELLA DEI TERMINI NEGATIVI SI HA:

$$f(a_k) \to \cos(0) = 1 \quad \text{E} \quad f(b_k) \to 0$$

QUINDI:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(0) = \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{\sin n}{n}\right) = \text{NON ESISTE}.$$

QUINDI $f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU $\mathbb{R}-\{0\}$.

$\boxed{b}$ SU $(0,1]$ LA CONVERGENZA NON È UNIFORME PERCHÉ, SE n È TALE CHE $\sin n < 0$ ALLORA:

$$d(f_n,f) = \sup_{x\in(0,1]} |f_n(x)-f(x)| \geq \sup_{x\in\left(0,-\frac{\sin n}{n}\right)} |f_n(x)-f(x)| =$$

PERCHÉ $x+\frac{\sin n}{n}<0$ E QUINDI $f\left(x+\frac{\sin n}{n}\right)=0$

$$= \sup_{0<x<-\frac{\sin n}{n}} \left|f\left(x+\frac{\sin n}{n}\right)-f(x)\right| = \sup_{0<x<-\frac{\sin n}{n}} |f(x)| = 1$$

INVECE SU $[1,100]$ LA CONVERGENZA È UNIFORME.

MOSTRIAMO CHE $\forall \varepsilon>0$ DEFINITIVAMENTE IN n SI HA $d(f_n,f)<\varepsilon$.

INFATTI, SICCOME $f(x)$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA SU $[\frac{1}{2}, 100+\frac{1}{2}]$, $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ T.C. $\forall x_1,x_2\in[\frac{1}{2},100+\frac{1}{2}]\ \ |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

QUINDI, SE $n>\max\{2,\frac{1}{\delta}\}$, $\forall x\in[1,100]$ SI HA:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| = \left|f\left(x+\frac{\sin n}{n}\right)-f(x)\right| < \varepsilon$$

PERCHÉ SIA $x+\frac{\sin n}{n}$ SIA x STANNO IN $[\frac{1}{2},100+\frac{1}{2}]$ E DISTANO TRA LORO MENO DI δ

PASSANDO AL $\sup$ PER $x\in[1,100]$ SI OTTIENE $d(f_n,f)<\varepsilon$.

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE SU $[1,100]$ SI HA CHE:

$\forall\varepsilon>0$ DEFINITIVAMENTE IN n $d(f_n,f)<\varepsilon$.

QUESTO SIGNIFICA CHE $f_n\to f$ UNIFORMEMENTE SU $[1,100]$.

$\boxed{c}$ LA CONVERGENZA SU $[1,+\infty)$ NON È UNIFORME.

MOSTRIAMO PIÙ IN GENERALE CHE PONENDO

$$f_n(x) = f(x+a_n) \quad \text{DOVE } a_n\to 0 \text{ CON } a_n\neq 0$$

SI HA COMUNQUE CHE $f_n \not\to f$ UNIFORMEMENTE SU $[1,+\infty)$

INFATTI, POSTO $x_n=\frac{\pi}{4|a_n|}$ E $y_n=\frac{\pi}{4|a_n|}-a_n$, SI HA:

$$d(f_n,f) = \sup_{x\geq 1} |f_n(x) - f(x)| \geq$$

$$\geq \max\left\{ \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{= \text{A}}, \underbrace{|f_n(y_n) - f(y_n)|}_{= \text{B}} \right\}$$

SI HA:

$$\text{A} = \left| \cos\left((x_n + a_n)^2\right) - \cos(x_n^2) \right| =$$

$$= \left| \cos\left(x_n^2 + 2a_nx_n + a_n^2\right) - \cos(x_n^2) \right| =$$

$$= \left| \cos\left(x_n^2 + \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(a_n) + a_n^2\right) - \cos(x_n^2) \right| =$$

$$= \left| \operatorname{sgn}(-a_n) \cdot \sin\left(x_n^2 + a_n^2\right) - \cos(x_n^2) \right| =$$

$$= \left| \operatorname{sgn}(-a_n) \left(\sin(x_n^2 + a_n^2) - \sin(x_n^2)\right) + \operatorname{sgn}(-a_n) \sin x_n^2 - \cos x_n^2 \right| \geq$$

$$\geq \left| \operatorname{sgn}(-a_n) \cdot \sin(x_n^2) - \cos(x_n^2) \right| - \left| \sin(x_n^2 + a_n^2) - \sin(x_n^2) \right|$$

POICHÉ $y_n = x_n - a_n$, SI HA ANCHE:

$$\text{B} = \left| \cos\left((y_n + a_n)^2\right) - \cos(y_n^2) \right| =$$

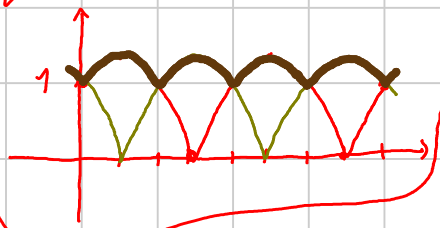
$$= \left| \cos(x_n^2) - \cos\left((x_n - a_n)^2\right) \right| =$$

$$= \ldots \geq \left| \operatorname{sgn}(+a_n) \sin(x_n^2) - \cos(x_n^2) \right| - \left| \sin(x_n^2 + a_n^2) - \sin(x_n^2) \right|$$

QUINDI SI OTTIENE:

3.1 PERCHÈ IL GRAFICO DI:

$g(t) = MAX\{|\sin t + \cos t|, |\sin t - \cos t|\}$ È



$$d(f_n, f) \geq MAX\left\{ \left|\sin(x_n^2) + \cos(x_n^2)\right|, \left|\sin(x_n^2) - \cos(x_n^2)\right| \right\} -$$

$$- \left|\sin(x_n^2 + a_n^2) - \sin(x_n^2)\right| \geq$$

$$\geq 1 - a_n^2 \longrightarrow 1 \qquad \text{PER } n \to +\infty$$

QUINDI $d(f_n, f) \not\to 0$.

CIÒ SIGNIFICA CHE LA CONVERGENZA SU $[1, +\infty)$ NON È UNIFORME.

---

4 **a** IL POLINOMIO CARATTERISTICO È $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ CHE HA RADICI $\lambda = 1$ E $\lambda = 2$, ENTRAMBE CON MOLTEPLICITÀ 1. QUINDI LA SOL. GENERALE DELLA OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$(10) \qquad Y_L(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ORA, SICCOME IL TERMINE NON OMOGENEO È COMBINAZIONE LINEARE DI $\cos x$ ED e^x, E $\lambda = 1$ È RADICE DEL POL. CARATTERISTICO CON MOLTEPLICITÀ 1, CI SARÀ UNA SOL. PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA DEL TIPO:

$$(11) \qquad Y_0(x) = A\cos x + B\sin x + Cxe^x$$

PER OPPORTUNI $A, B, C \in \mathbb{R}$.

DERIVIAMO (11) E SOSTITUIAMO NELL'EQUAZIONE:

$$Y_0'(x) = -A\sin x + B\cos x + C(x+1)e^x$$

$$Y_0''(x) = -A\cos x - B\sin x + C(x+2)e^x$$

SI OTTIENE:

$$-A\cos x - B\sin x + C(x+2)e^x - 3\left(-A\sin x + B\cos x + C(x+1)e^x\right) + 2\left(A\cos x + B\sin x + Cxe^x\right) = 10\cos x + e^x$$

CIOÈ:

$$(A-3B)\cos x + (3A+B)\sin x - Ce^x = 10\cos x + e^x$$

DA CUI SEGUE:

$$A-3B=10, \quad 3A+B=0 \quad \text{E} \quad -C=1$$

OVVERO:

$$A=1, \quad B=-3 \quad \text{E} \quad C=-1.$$

QUINDI LA SOL. PARTICOLARE TROVATA PER LA NOSTRA EQUAZIONE È:

$$Y_0(x) = \cos x - 3\sin x - xe^x$$

DI CONSEGUENZA, LA SOL. GENERALE È:

$$Y(x) = Y_L(x) + Y_0(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} + \cos x - 3\sin x - xe^x \quad \text{CON } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{b}$ L'OPERATORE DIFF. LINEARE A COEFF. COSTANTI REALI DI ORDINE MINIMO CHE, APPLICATO A $Y(x)$, LA ANNULLA DEVE AVERE IL POLINOMIO CARATTERISTICO CON LE RADICI:

$\lambda = 1$ CON MOLTEPLICITÀ 2

$\lambda = 2$ " " " " 1

$\lambda = i$ " " " " 1

IL POL. A COEFF. REALI DI GRADO MINIMO CON TALI RADICI È:

$$P(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda^2+1) = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

QUINDI L'EQUAZIONE CERCATA È:

$$Y^{(5)} - 4Y^{(4)} + 6Y^{(3)} - 6Y'' + 5Y' - 2Y = 0$$

5 SI HA:

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|x|^3 \cdot y^4}{x^8+y^6} = \frac{(x^4)^{\frac{3}{4}} \cdot (|y^3|)^{\frac{4}{3}}}{(x^4)^2+(|y^3|)^2} = \underbrace{\boxed{(x^4)^{\frac{1}{12}}}}_{\to 0} \cdot \boxed{\frac{(x^4)^{\frac{2}{3}} \cdot (|y^3|)^{\frac{4}{3}}}{(x^4)^2+(|y^3|)^2}}$$

LIMITATA, PERCHÉ DELLA FORMA

$$\frac{u^\alpha \cdot v^\beta}{u^2+v^2}$$

CON $\alpha+\beta=2$

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO, SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

PERCIÒ f È CONTINUA IN $(0,0)$.

INVECE f NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ PERCHÉ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^4}{(x^8+y^6)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \text{NON ESISTE}$$

QUESTO PERCHÉ SE CI SI RESTRINGE AGLI ASSI VIENE ZERO, MENTRE SE CI SI RESTRINGE ALLA SEMIRETTA $y=x$ CON $x>0$ SI OTTIENE:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3\cdot x^4}{(x^8+x^6)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ne 0$$