ANALISI MATEMATICA 2

PROVA SCRITTA DEL 12/02/2021

1 PER OGNI $b \in \mathbb{R}$ SI CONSIDERI L'INTEGRALE IMPROPRIO

$$I(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{DOVE} \quad f(x) = \frac{1}{|x|} \cdot \sin\frac{1}{x}$$

a MOSTRARE CHE $I(-1)$ CONVERGE.

b MOSTRARE CHE $I(0)$ CONVERGE.

c DOPO AVER SPIEGATO PERCHÉ $I(b)$ CONVERGE PER OGNI $b \in \mathbb{R}$, CALCOLARE $\lim_{b \to +\infty} I(b)$.

---

2 POSTO $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, SIANO $a_n = \int_n^{n+\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ E $b_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

STUDIARE IL CARATTERE DELLE SERIE:

a $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ **b** $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$ **c** $\sum_{n=2}^{+\infty} |b_n|$ FACOLTATIVA

---

3 PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ E PER OGNI $x > -1$ SIA $f_n(x) = \frac{x + x^n}{1 + x^n}$.

DELLA SUCCESSIONE DI FUNZIONI (f_n) SI STUDI LA CONVERGENZA:

a PUNTUALE SU $(-1, +\infty)$. **b** UNIFORME SU $[0, \frac{9}{10}]$, $[2, +\infty)$, $(-1, 0]$.

FACOLTATIVA **c** UNIFORME SU $[\alpha, +\infty)$ PER OGNI $\alpha > -1$.

$\boxed{4}$ SI CONSIDERI IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = y \ln y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$\boxed{a}$ TROVARNE LA SOLUZIONE $y_1(x)$ NEL CASO: $x_0 = 0$ E $y_0 = -\frac{1}{e}$.

$\boxed{b}$ MOSTRARE CHE PER OGNI (x_0, y_0) CON $-1 < y_0 < 0$ LA SOLUZIONE DI $(*)$ È UNA TRASLAZIONE DELLA $y_1(x)$ TROVATA NEL PUNTO $\boxed{a}$.

$\boxed{5}$ CALCOLARE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{100} \cdot y^{100}}{2xy + A\cdot(x^2+y^2)}$$

NEI CASI: $\boxed{a}$ $A=0$ $\boxed{b}$ $A=1$ $\boxed{c}$ $A>1$ $\boxed{d}$ $0<A<1$ FACOLTATIVO

SOLUZIONI

1 **a** POICHÉ:

$$|f(x)| = \frac{1}{|x|} \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \cdot \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x^2}$$

ED È NOTO CHE $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$ CONVERGE, DAL CRITERIO DEL CONFRONTO SEGUE CHE:

$$\int_{-\infty}^{-1} |f(x)| \, dx \quad \text{CONVERGE.}$$

QUINDI, GRAZIE AL CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

$$I(-1) = \int_{-\infty}^{-1} f(x) \, dx \quad \text{CONVERGE.}$$

b SI HA:

$$I(0) = \int_{-\infty}^{0} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x) \, dx + \int_{-1}^{0} f(x) \, dx = I(-1) + \int_{-1}^{0} f(x) \, dx$$

POICHÈ SAPPIAMO GIÀ CHE $I(-1)$ CONVERGE, BASTERÀ MOSTRARE CHE CONVERGE $\int_{-1}^{0} f(x) dx$. SI HA:

$$\int_{-1}^{0} f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{|x|} \sin \frac{1}{x} \overset{x = -\frac{1}{t}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1}^{\frac{1}{\varepsilon}} |t| \cdot \sin(-t) \cdot \frac{1}{t^2} dt =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} - \int_{1}^{c} \frac{\sin t}{t} dt = - \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

MA L'ULTIMO INTEGRALE È NOTO: SAPPIAMO CHE CONVERGE.

$\boxed{C}$ SI VERIFICA CHE $\int_0^1 f(x)\,dx$ CONVERGE IN MODO DEL TUTTO ANALOGO A QUANTO FATTO NEL PUNTO $\boxed{b}$ CON $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.
DI CONSEGUENZA $I(b)$ CONVERGE ANCHE PER $b>0$ PERCHÉ SI HA:

$$I(b)=\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx+\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{b} f(x)\,dx.$$

MOSTRIAMO ORA CHE:

$$\lim_{b\to+\infty} I(b)=0$$

A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE, PER OGNI $b>0$, SI HA:

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-b}^{-\varepsilon} f(x)\,dx\overset{x=-u}{=}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{b}^{\varepsilon} f(-u)\cdot(-1)\,du=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{b} f(-u)\,du\overset{\text{PERCHÉ } f \text{ È DISPARI}}{=}\lim_{\varepsilon\to0^+}-\int_{\varepsilon}^{b} f(u)\,du=$$

$$=-\int_0^b f(u)\,du$$

DI CONSEGUENZA, PER OGNI $b>0$, SI HA:

$$I(b)=\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-b} f(x)\,dx+\int_{-b}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{b} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{-b} f(x)\,dx+0=I(-b)$$

QUINDI:

PERCHÉ $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ CONVERGE E $\int_{-\infty}^{-b} f(x)\,dx$ È IL SUO RESTO

$$\lim_{b\to+\infty} I(b)=\lim_{b\to+\infty} I(-b)=\lim_{b\to+\infty}\int_{-\infty}^{-b} f(x)\,dx=0$$

2 **a** SI HA:

$$|a_n| = \left| \int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leq \int_n^{n+\frac{1}{n}} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \leq \int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{1}{n}\, dx = \frac{1}{n^2}$$

QUINDI, POICHÈ $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE, GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO CONVERGE ANCHE $\sum |a_n|$, DI CONSEGUENZA ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE, GRAZIE AL CRITERIO DELLA CONV. ASSOLUTA.

b IL PROCEDIMENTO PIÙ COMODO È APPLICARE LA DEFINIZIONE CIOÈ, POSTO $S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n$, MOSTRARE CHE $S_n \to \ell$ FINITO.

SI HA:

$$S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n = \int_2^3 f(x)\, dx + \int_3^4 f(x)\, dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)\, dx =$$

$$= \int_2^{n+1} f(x)\, dx = \int_2^{n+1} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

QUINDI:

PERCHÈ È GIÀ NOTO CHE $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ CONVERGE

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \int_2^{n+1} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \ell \in \mathbb{R}$$

QUESTO SIGNIFICA CHE $\sum b_n$ CONVERGE.

c FACCIAMO UN'OSSERVAZIONE PRELIMINARE: SE L'INTERVALLO $[n, n+1]$ CONTIENE UN NUMERO DELLA FORMA $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, CON $k \in \mathbb{N}$, ALLORA $b_n > \frac{1}{2(n+1)}$. INFATTI IN TAL CASO SI HA:

$$[n, n+1] \subset \left[2k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 1\right]$$

DA CUI SEGUE:

(1) $$\min_{n \leq x \leq n+1} (\sin x) \geq \min_{\frac{\pi}{2}-1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}+1} (\sin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

QUINDI, GRAZIE A (1), SI OTTIENE APPUNTO CHE

(2) $$b_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x}\,dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{2x}\,dx > \frac{1}{2(n+1)}$$

OGNI VOLTA CHE $[n, n+1]$ CONTIENE UN NUMERO DEL TIPO

(3) $$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{CON} \quad k \in \mathbb{N}.$$

SIAMO ORA PRONTI A MOSTRARE CHE $\sum |b_n|$ DIVERGE.

PER COMODITÀ FACCIAMO PARTIRE LA SOMMA DA $n=8$, TANTO IL CARATTERE NON CAMBIA, E PONIAMO

$$S_n = |b_8| + |b_9| + \dots + |b_n|.$$

VISTO CHE $\sum |b_n|$ È A TERMINI POSITIVI, BASTA MOSTRARE CHE UNA SOTTOSUCCESSIONE DI (S_n) TENDE A $+\infty$, MOSTRIAMO QUINDI CHE $S_{7k} \to +\infty$. SI HA:

(4) $$S_{7k} = \sum_{m=8}^{7k} |b_m| = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{j=1}^{7} |b_{7i+j}| \right)$$

MA SICCOME $2\pi < 7$, ALMENO UNO DEI 7 INTERVALLI:

$$[7i+1, 7i+2], [7i+2, 7i+3], \dots, [7i+7, 7i+8]$$

CONTIENE UN NUMERO DELLA FORMA (3), QUINDI ALMENO UNO DEI 7 TERMINI:

(5) $$b_{7i+1}, b_{7i+2}, \dots, b_{7i+7}$$

SODDISFA LA DISUGUAGLIANZA (2).

QUINDI, INDICATO CON b_{7i+j} QUELLO DEI (5) CHE SODDISFA (2), SI HA:

$$|b_{7i+1}|+\cdots+|b_{7i+j}|+\cdots+|b_{7i+7}| \geq$$

$$\geq 0+\cdots+0+|b_{7i+j}|+0+\cdots+0 =$$

$$= |b_{7i+j}| = b_{7i+j} > \frac{1}{2(7i+j+1)} \geq \frac{1}{2(7i+8)} > \frac{1}{14(i+2)}$$

QUINDI LA (4) DIVENTA:

$$S_{7k} = \sum_{i=1}^{k-1}\left(|b_{7i+1}|+\cdots+|b_{7i+7}|\right) >$$

$$> \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{14(i+2)} = \frac{1}{14}\sum_{i=3}^{k+1}\frac{1}{i} \longrightarrow +\infty \quad \text{PER } k\to+\infty$$

PERCHÉ LA SERIE ARMONICA DIVERGE

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO, SI HA:

$$\lim_{k\to+\infty} S_{7k} = +\infty$$

DA CUI, ESSENDO (S_n) CRESCENTE, SEGUE:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

CIOÈ $\sum |b_n|$ DIVERGE.

$\boxed{3}$ $\boxed{a}$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x+x^n}{1+x^n} = \begin{cases} \stackrel{-1<x<1}{=} \dfrac{x+0}{1+0} = x \\ \stackrel{x>1}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{o(x^n)+x^n}{o(x^n)+x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{x^n} = 1 \\ \stackrel{x=1}{=} \dfrac{1+1}{1+1} = 1 \end{cases}$$

QUINDI, POSTO

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{PER } -1<x<1 \\ 1 & \text{PER } x\geq 1 \end{cases}$$

SI HA CHE $f_n \to f$ PUNTUALMENTE SU $(-1,+\infty)$.

$\boxed{b}$ SU $[0,\frac{9}{10}]$ SI HA:

(6)
$$f_n(x)-f(x)=\frac{x+x^n}{1+x^n}-x=\frac{x+x^n-x-x^{n+1}}{1+x^n}=\frac{x^n}{1+x^n}\cdot(1-x)$$

QUINDI, PER OGNI $x\in[0,\frac{9}{10}]$ SI HA:

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n\cdot\frac{1-x}{1+x^n}\leq x^n\cdot 1\leq\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

QUINDI, SU $[0,\frac{9}{10}]$ SI HA:

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in[0,\frac{9}{10}]}|f_n(x)-f(x)|<\left(\frac{9}{10}\right)^n\to 0$$

DA CUI SEGUE CHE $f_n\to f$ UNIFORMEMENTE SU $[0,\frac{9}{10}]$.

PASSIAMO ORA A $[2,+\infty)$. SI HA:

(7)
$$f_n(x)-f(x)=\frac{x+x^n}{1+x^n}-1=\frac{x+x^n-1-x^n}{1+x^n}=\frac{x-1}{1+x^n}$$

QUINDI SI OTTIENE:

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x-1}{1+x^n}<\frac{x}{x^n}=\frac{1}{x^{n-1}}\leq\frac{1}{2^{n-1}}\to 0$$

CIÒ SIGNIFICA CHE SU $[2,+\infty)$ SI HA $d(f_n,f)\to 0$ E QUINDI LA CONVERGENZA È UNIFORME.

INVECE SU $(-1,0]$ LA CONVERGENZA NON È UNIFORME PERCHÉ

$$\lim_{x\to-1^+}\left(f_n(x)-f(x)\right)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^n}{1+x^n}\cdot(1-x)=\begin{cases}-\infty & \text{SE } n \text{ È DISPARI}\\ +1 & \text{SE } n \text{ È PARI}\end{cases}$$

IN OGNI CASO DUNQUE $d(f_n,f)\geq 1$ E QUINDI $d(f_n,f)\not\to 0$.

$\boxed{C}$ PRESO $\alpha \in (-1,0)$, MOSTRIAMO SEPARATAMENTE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME SU $[\alpha,0]$, $[0,1]$ E $[1,2]$, VISTO CHE SU $[2,+\infty)$ CE L'ABBIAMO GIÀ.

SU $[\alpha,0]$, GRAZIE A (6), SI HA:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right| = \left|x^n \cdot \frac{1-x}{1+x^n}\right| = |x|^n \cdot \frac{1-x}{1+x^n} \leq |\alpha|^n \cdot \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|^n}$$

QUINDI

$$d(f_n,f) \leq |\alpha|^n \cdot \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|^n} \to 0 \cdot \frac{1+|\alpha|}{1-0} = 0$$

DI CONSEGUENZA $d(f_n,f)\to 0$, CIOÈ

(8) $$f_n \to f \text{ UNIFORMEMENTE SU } [\alpha,0].$$

SU $[0,1]$ LA CONVERGENZA UNIFORME SI PUÒ OTTENERE USANDO IL T. DEL DINI PERCHÈ, PER OGNI FISSATO $x\in[0,1]$, LA SUCCESSIONE $(f_n(x))$ È DECRESCENTE PERCHÈ:

$$f_n(x) = \frac{x+x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{1-x}{1+x^n}$$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^n$ DECRESCE $\Rightarrow \frac{1-x}{1+x^n}$ CRESCE $\Rightarrow$
$\Rightarrow 1-\frac{1-x}{1+x^n}$ DECRESCE

ANCHE SU $[1,2]$ SI PUÒ APPLICARE IL T. DEL DINI OSSERVANDO CHE, PER OGNI FISSATO $x\in[1,2]$ LA SUCCESSIONE $(f_n(x))$ È DECRESCENTE PERCHÈ:

$$f_n(x) = \frac{x+x^n}{1+x^n} = 1 + \frac{x-1}{1+x^n}$$

$x \geq 1 \Rightarrow x^n$ CRESCENTE $\Rightarrow 1+\frac{x-1}{1+x^n}$ DECRESCENTE

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO LA CONVERGENZA UNIFORME SU $[\alpha,0]$, $[0,1]$ E $[1,2]$ CHE, COMBINATE CON QUELLA GIÀ NOTA SU $[2,+\infty)$, CI DANNO LA TESI.

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$ L'USO DEL T. DEL DINI, SIA SU $[0,1]$ CHE SU $[1,2]$ SI POTEVA EVITARE RICORRENDO AD UN TRUCCO. SICCOME NEI DUE CASI È MOLTO SIMILE NE MOSTRIAMO I DETTAGLI SOLO NEL CASO $[0,1]$. IL TRUCCO CONSISTE NELLO SPEZZARE $[0,1]$ IN MODO VARIABILE, DIPENDENTE DA n. PIÙ PRECISAMENTE, PER OGNI INTERO $n\geq 2$, SI HA:

$$[0,1]=\left[0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\cup\left[1-\frac{1}{\sqrt{n}},1\right]$$

QUINDI:

(9) $$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\max\{A_n,B_n\}$$

DOVE:

$$A_n=\sup_{x\in[0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}]}|f_n(x)-f(x)|$$

E

$$B_n=\sup_{x\in[1-\frac{1}{\sqrt{n}},1]}|f_n(x)-f(x)|.$$

RICORDANDO (6) SI HA:

$$B_n=\sup_{x\in[1-\frac{1}{\sqrt{n}},1]}(1-x)\cdot\frac{x^n}{1+x^n}\leq\sup_{x\in[1-\frac{1}{\sqrt{n}},1]}(1-x)\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$$

PERCHÈ, PER OGNI FISSATO n, $\frac{x^n}{1+x^n}$ È CRESCENTE IN x SULL'INTERVALLO $[0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}]$

E

$$A_n=\sup_{x\in[0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}]}(1-x)\frac{x^n}{1+x^n}\leq\sup_{x\in[0,1-\frac{1}{\sqrt{n}}]}\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{1+\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}\to 0$$

QUINDI $A_n\to 0$ E $B_n\to 0$, DI CONSEGUENZA $\max\{A_n,B_n\}\to 0$.

QUESTO FATTO, COMBINATO CON (9), CI FORNISCE LA CONVERGENZA UNIFORME SU $[0,1]$.

SU $[1,2]$ IL TRUCCO FUNZIONA IN MODO ANALOGO DOPO AVER OSSERVATO CHE $[1,2]=[1,1+\frac{1}{\sqrt{n}}]\cup[1+\frac{1}{\sqrt{n}},2]$.

---

4 a FINCHÈ VALE LA CONDIZIONE $-1<y(x)<0$, VALGONO I SEGUENTI PASSAGGI:

$$y'(x)=y(x)\ln(y^2(x))\iff y'(x)=2y(x)\ln(-y(x))\iff\dots$$

$$\ldots \iff \frac{1}{\ln(-y(x))} \cdot \frac{y'(x)}{y(x)} = 2 \iff \Big(\ln\big(-\ln(-y(x))\big)\Big)' = 2 \iff$$

$$\iff \ln\big(-\ln(-y(x))\big) = 2x + c \quad \text{CON} \quad c \in \mathbb{R}.$$

DALLA CONDIZIONE $y(0) = -\frac{1}{e}$ SEGUE QUINDI

$$\ln\left(-\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = 2\cdot 0 + c$$

CIOÈ $c = \ln(\ln e) = 0$.

SI OTTIENE QUINDI:

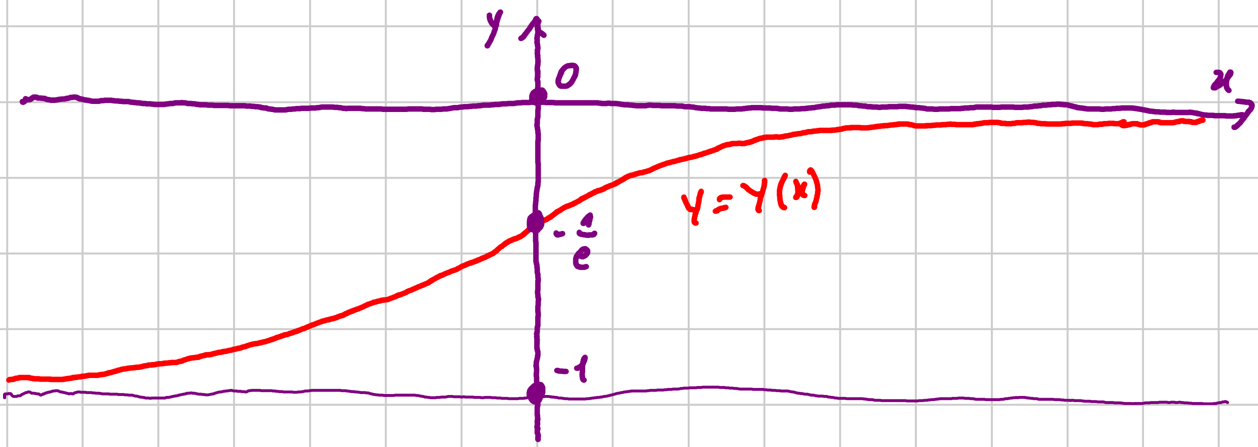
$$\ln\big(-\ln(-y(x))\big) = 2x$$

DA CUI SEGUE:

$$y(x) = -e^{-e^{2x}}.$$

SI NOTI CHE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ SI HA $-1 < y(x) < 0$ E QUINDI VALGONO LE CONDIZIONI PER LE QUALI I CALCOLI FATTI SONO VALIDI.
SI NOTI CHE $y(x)$ È CRESCENTE ED HA ASINTOTO ORIZZONTALE $y = 0$ A $+\infty$ E $y = -1$ A $-\infty$:

(10)



$\boxed{b}$ SI NOTI CHE L'EQ. DIFF. ASSEGNATA È AUTONOMA, CIOÈ DELLA FORMA $y' = F(y)$ CON F CHE NON DIPENDE DA x.

DI CONSEGUENZA, SE $y(x)$ È SOLUZIONE, LO È ANCHE OGNI SUA TRASLATA ORIZZONTALE, CIOÈ OGNI FUNZIONE $v(x)$ DEL TIPO:

$$v(x) = y(x+a) \qquad \text{CON } a \in \mathbb{R}.$$

QUESTO PERCHE:

$$v'(x) = y'(x+a) \cdot 1 = F(y(x+a)) = F(v(t))$$

MA PER COME È FATTA $y(x)$ (VEDI FIG. (10)), LE SUE TRASLATE ORIZZONTALI RIEMPIONO LA STRISCIA $\mathbb{R} \times (-1,0)$, OVVERO:

$$\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times(-1,0) \ \exists a \in \mathbb{R} \text{ T.C. } y = y(x+a) \text{ PASSA PER } (x_0,y_0).$$

PER QUANTO APPENA DETTO TALE FUNZIONE È SOL. DEL PROB. DI CAUCHY:

(11) $$\begin{cases} y' = y \ln(y^2) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ED È L'UNICA, GRAZIE AL T. DI UNICITÀ.

QUINDI PER OGNI $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times(-1,0)$ LA SOL. DI (11) È UNA TRASLATA DI $y(x)$.

$\boxed{5}$ $\boxed{a}$ PER $A=0$ IL DENOMINATORE DIVENTA xy QUINDI LA FUNZIONE È DEFINITA FUORI DAGLI ASSI E VALE $x^{99} \cdot y^{99}$. QUINDI TENDE A 0 PER $(x,y) \to (0,0)$.

$\boxed{b}$ PER $A=1$ IL DENOMINATORE È $2xy + x^2 + y^2$ QUINDI IL LIMITE DIVENTA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{100}\, y^{100}}{(x+y)^2}$$

CHE NON ESISTE PERCHÉ VALE 0 SE CI SI RESTRINGE AGLI ASSI, MENTRE SE CI SI RESTRINGE A $y=-x+x^{100}$ CON $x>0$ SI HA:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{100}\cdot(-x+x^{100})^{100}}{(x-x+x^{100})^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{200}+o(x^{200})}{x^{200}} = 1$$

QUINDI PER $A=1$ IL LIMITE NON ESISTE PERCHÉ SI OTTENGONO VALORI DIVERSI CAMBIANDO RESTRIZIONE.

$\boxed{c}$ PER $A>1$, INDICANDO CON $f(x,y)$ LA FUNZIONE DI CUI SI CALCOLA IL LIMITE, SI HA:

$$f(x,y) = \frac{x^{100}\cdot y^{100}}{(x+y)^2+(A-1)(x^2+y^2)}$$

QUINDI, SICCOME $A>1$, SI HA:

$$0 \le f(x,y) \le \frac{x^{100}\cdot y^{100}}{(A-1)(x^2+y^2)} = \underbrace{\boxed{|x|^{99}\cdot|y|^{99}}}_{\to\, 0} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{2(A-1)}}}_{\text{COSTANTE}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{|2xy|}{x^2+y^2}}}_{\le 1}$$

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$\boxed{d}$ MOSTRIAMO CHE PER $0<A<1$ IL LIMITE NON ESISTE.

OSSERVIAMO CHE LA FUNZIONE $f(x,y)$ DI CUI SI FA IL LIMITE È IDENTICAMENTE NULLA SUGLI ASSI QUINDI MOSTRARE CHE IL LIMITE NON ESISTE EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE NON PUÒ ESSERE 0. BASTA QUINDI TROVARE PUNTI ARBITRARIAMENTE VICINI A $(0,0)$ NEI QUALI $|f(x,y)|$ VALGA PIÙ DI 1.

A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE NEI PUNTI (x,y) CHE DISTANO ρ DA $(0,0)$, CIOÈ TALI CHE

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta \quad \text{CON} \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

SI HA:

$$f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{(\rho\cos\theta \cdot \rho\sin\theta)^{100}}{2\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta + A\rho^2} =$$

(12)

$$= \rho^{198} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{100}}{\sin 2\theta + A} = \rho^{198} \cdot g(\theta)$$

DOVE ABBIAMO INDICATO CON $g(\theta)$ LA FUNZIONE DELLA SOLA θ CHE MOLTIPLICA ρ^{198}.

SI OSSERVI ORA CHE, ESSENDO $0<A<1$, ESISTE SENZ'ALTRO $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ TALE CHE $\sin 2\theta_0 = -A$.

SICCOME TALE θ_0 ANNULLA IL DENOMINATORE DI $g(\theta)$ MA NON IL NUMERATORE, SI AVRÀ CHE $|g(\theta)| \to +\infty$ PER $\theta \to \theta_0$.

DI CONSEGUENZA ESISTONO VALORI DI θ TALI CHE $|g(\theta)| > \frac{1}{\rho^{198}}$.

PER TALI θ LA (12) DIVENTA:

$$|f(x,y)| = \rho^{198} \cdot |g(\theta)| > \rho^{198} \cdot \frac{1}{\rho^{198}} = 1$$

ABBIAMO QUINDI MOSTRATO CHE:

$$\forall \rho > 0 \ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ T.C. } d((x,y),(0,0)) = \rho \text{ MA } |f(x,y)| > 1$$

QUINDI $f(x,y) \not\to 0$ PER $(x,y) \to (0,0)$.