

Analisi Matematica (II modulo) - Sim. 3

Titolo nota

Prova simulata su: Serie - docente: Prof. E. Callegari - Univ. di Roma Tor Vergata

SOLUZIONI

1 DETERMINARE IL CARATTERE DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot \ln(1+n^4)}{n^{n+1}}$.

SVOLGIMENTO

POSTO $a_n = \frac{n! \cdot \ln(1+n^4)}{n^{n+1}}$ SI HA

PERCHÉ $n! \leq n^{n+1}$

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+1}} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \ln(1+n^4) \leq \frac{1}{n^2} \cdot \ln(1+n^4) \approx \frac{4 \ln n}{n^2} = 4 \cdot \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$$

MA SAPPIAMO CHE $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$ CONVERGE, QUINDI $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ln(1+n^4)$ CONVERGE

PER IL CR. DEL CONFRONTO ASINTOTICO, QUINDI $\sum a_n$ CONVERGE PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO.

SVOLG. ALTERNATIVO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot \ln(1+(n+1)^4)}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n! \cdot \ln(1+n^4)} =$$

PERCHÉ
 $\ln(1+(n+1)^4) \approx 4 \ln(n+1) \approx 4 \ln n$
E
 $\ln(1+n^4) \approx 4 \ln n$

$$= \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{\ln(1+(n+1)^4)}{\ln(1+n^4)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}} \cdot \frac{\ln(1+(n+1)^4)}{\ln(1+n^4)} \rightarrow \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

POICHÉ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$ LA SERIE CONVERGE PER IL CR. DEL RAPPORTO.

2 STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} A^n$ AL VARIARE DI $A > 0$.

SVOLGIMENTO

POSTO $a_n = \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} A^n$, APPLICO IL CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)^{n+1}}{(n+1)^{n+3}} \cdot A^{n+1} \cdot \frac{n^{n+2}}{(n+2)^n} \cdot \frac{1}{A^n} =$$

$$= \frac{n+3}{n+1} \cdot \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n+1} \cdot A = \frac{n+3}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} \cdot A \rightarrow 1 \cdot e \cdot \frac{1}{e} \cdot A = A$$

QUINDI, VISTO CHE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow A$, GRAZIE AL CR. DEL RAPPORTO POSSO DIRE CHE

PER $0 < A < 1$ $\sum a_n$ CONVERGE, MENTRE PER $A > 1$ $\sum a_n$ DIVERGE.

IL CASO $A = 1$ VA TRATTATO A PARTE.

PER $A = 1$ SI HA:

$$a_n = \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} \approx \frac{e}{n^2}$$

POICHÉ $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE, $\sum a_n$ CONVERGE PER CONFRONTO ASINTOTICO.

3 DETERMINARE IL CARATTERE DI $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) + (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$

SVOLGIMENTO

SI NOTI CHE $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ CONVERGE PER IL CR. DI LEIBNIZ, VISTO CHE.

$\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow 0$ DECRESCENDO

PERCHÉ $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

DI CONSEGUENZA, IL CARATTERE DI:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) + (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

È UGUALE AL CARATTERE DI:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

CHE A SUA VOLTA È UGUALE AL CARATTERE DI:

(1)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

PERCHÉ ANCHE $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CONVERGE, GRAZIE A LEIBNIZ.

DUNQUE STUDIARE LA SERIE ASSEGNATA EQUIVALE A STUDIARE (1).

OSSERVIAMO CHE:

$$\ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) - x = -\frac{x^2}{2} + O(x^3) \approx -\frac{x^2}{2}$$

QUINDI:

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = -\frac{1}{2n}$$

MA $\sum -\frac{1}{2n}$ DIVERGE ED È A SEGNO COSTANTE, QUINDI ANCHE LA (1) DIVERGE, PER IL CR. DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

PER QUANTO DETTO ANCHE LA SERIE ASSEGNATA DIVERGE.

4 DATA $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha + \sin(3n)}$, STUDIARNE IL CARATTERE NEI CASI:

a $\alpha = 2$

b $\alpha = 1$

c $\alpha = \frac{2}{3}$

FACOLTATIVO → d $\alpha = \frac{1}{2}$

SVOLGIMENTO

I 4 CASI PROPOSTI SONO DI DIFFICOLTÀ CRESCENTE; PER CIASCUNO PROPORREMO UN PROCEDIMENTO DIVERSO CHE, IN GENERE VALE ANCHE PER I CASI CHE LO PRECEDONO.

a POSTO $a_n = \frac{(-1)^n}{2n^2 + \sin(3n)}$ SI HA:

$$|a_n| = \frac{1}{|2n^2 + \sin(3n)|} = \frac{1}{2n^2 + \sin(3n)} \approx \frac{1}{2n^2}$$

QUINDI $\sum |a_n|$ CONVERGE PER CONFRONTO ASINTOTICO E, DI CONSEGUENZA $\sum a_n$ CONVERGE PER IL CR. DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA.

b POSTO $a_n = \frac{1}{2n + \sin(3n)}$, DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\sum (-1)^n a_n$ CONVERGE.

OSSERVIAMO CHE, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA:

$$2(n+1) + \sin(3(n+1)) \geq 2n + \sin(3n)$$

PERCHÉ:

$$2(n+1) + \sin(3(n+1)) - 2n - \sin(3n) = 2 + \sin(3n+3) - \sin(3n) \geq 2 - 2 = 0$$

DI CONSEGUENZA, VISTO CHE PER $n \geq 1$ $2n + \sin(3n)$ È POSITIVO, SI HA:

$$\frac{1}{2(n+1) + \sin(3(n+1))} \leq \frac{1}{2n + \sin(3n)}$$

CIOÈ (a_n) È DECRESCENTE.

INOLTRE $a_n \rightarrow 0$ PERCHÉ $2n + \sin(3n) \rightarrow +\infty$.

SONO QUINDI SODDISFATTE LE CONDIZIONI DEL CR. DI LEIBNIZ, PERCIÒ $\sum (-1)^n a_n$ CONVERGE.

C STAVOLTA LEIBNIZ NON FUNZIONA PERCHÉ $a_n = \frac{1}{2 \cdot n^{\frac{2}{3}} + \sin(3n)}$ NON È DECRESCENTE.

TUTTAVIA, SFRUTTANDO IL FATTO CHE $\sum \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}}$ CONVERGE (PER LEIBNIZ) POSSIAMO AFFERMARE CHE

(2) $\sum (-1)^n a_n$ E $\sum \left((-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} \right)$

HANNO LO STESSO CARATTERE, BASTERÀ DUNQUE STUDIARE LA SECONDA.

OSSERVIAMO CHE:

$$\begin{aligned} (-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} &= (-1)^n \left(\frac{1}{2n^{\frac{2}{3}} + \sin(3n)} - \frac{1}{2n^{\frac{2}{3}}} \right) = \\ &= (-1)^n \frac{2n^{\frac{2}{3}} - 2n^{\frac{2}{3}} - \sin(3n)}{(2n^{\frac{2}{3}} + \sin(3n)) \cdot 2n^{\frac{2}{3}}} = \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \sin(3n)}{4n^{\frac{4}{3}} + 2n^{\frac{2}{3}} \sin(3n)} \end{aligned}$$

QUINDI:

$$\left| (-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} \right| = \frac{|\sin(3n)|}{|4n^{\frac{4}{3}} + 2n^{\frac{2}{3}} \sin(3n)|} \leq \frac{1}{|4n^{\frac{4}{3}} + 2n^{\frac{2}{3}} \sin(3n)|} \approx \frac{1}{4n^{\frac{4}{3}}}$$

A

A QUESTO PUNTO, VISTO CHE $\sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ CONVERGE, VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$$\sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum \text{A} \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum \left| (-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} \right| \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum \left((-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} \right) \text{ CONVERGE}$$

CONFRONTO ASINTOTICO CONFRONTO ASSOLUTA CONVERGENZA

RICORDANDO ORA CHE VALE (2) POSSIAMO CONCLUDERE CHE ANCHE $\sum (-1)^n a_n$ CONVERGE.

(d) POSTO $a_n = \frac{1}{2\sqrt{n} + \sin(3n)}$, DOBBIAMO TROVARE IL CARATTERE DI $\sum (-1)^n a_n$.

ANCHE STAVOLTA, COME PER (c), NON SI PUÒ APPLICARE LEIBNIZ PERCHÉ (a_n) NON È DECRESCENTE.

PROCEDENDO COME IN (c), VISTO CHE $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ CONVERGE (PER LEIBNIZ), POSSIAMO DIRE CHE:

(3) $\sum (-1)^n a_n$ E $\sum \left((-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \right)$ HANNO STESSO CARATTERE.

BASTERÀ DUNQUE STUDIARE LA SECONDA. SI HA:

$$(-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} = (-1)^n \left(\frac{1}{2\sqrt{n} + \sin(3n)} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) = (-1)^n \frac{2\sqrt{n} - 2\sqrt{n} - \sin(3n)}{(2\sqrt{n} + \sin(3n)) \cdot 2\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{n+1} \sin(3n)}{4n + 2\sqrt{n} \cdot \sin(3n)}$$

FIN QUI È STATO TUTTO UGUALE A (c), TUTTAVIA A QUESTO PUNTO PER STUDIARE $\sum$ CI

SERVE UN'ALTRA IDEA PERCHÉ AL DENOMINATORE ABBIAMO VI NON $n^{\frac{1}{2}}$, QUINDI NON C'È LA POSSIBILITÀ DI RICORRERE ALLA CONVERGENZA ASSOLUTA.

L'IDEA È LA SEGUENTE: SE DIMOSTRIAMO CHE $\sum \frac{(-1)^{n+1} \sin(3n)}{4n}$ CONVERGE (COSSA CHE FAREMO)

ALLORA POSSIAMO AFFERMARE CHE:

(4) $\sum \frac{(-1)^{n+1} \sin(3n)}{4n + 2\sqrt{n} \sin(3n)}$ E $\sum \left(\frac{(-1)^{n+1} \sin(3n)}{4n + 2\sqrt{n} \sin(3n)} + \frac{(-1)^n \sin(3n)}{4n} \right)$ HANNO LO STESSO CARATTERE

QUINDI BASTA STUDIARE LA SECONDA. SI HA:

$$\frac{(-1)^{n+1} \sin(3n)}{4n + 2\sqrt{n} \sin(3n)} + \frac{(-1)^n \sin(3n)}{4n} = (-1)^{n+1} \sin(3n) \cdot \frac{4n - 4n - 2\sqrt{n} \sin(3n)}{(4n + 2\sqrt{n} \sin(3n)) \cdot 4n} = \frac{(-1)^n \sin^2(3n)}{8n\sqrt{n} + 4n \sin(3n)}$$

STAVOLTA, SFRUTTANDO IL FATTO CHE IL DENOMINATORE DI $\square$ È $\approx 8n\sqrt{n}$, SI OTTIENE CHE $\sum \square$

CONVERGE ASSOLUTAMENTE E QUINDI ANCHE SEMPLICEMENTE.

A QUESTO PUNTO, DA (4) SEGUE CHE ANCHE

$$\sum \frac{(-1)^{n+1} \sin(3n)}{4n + 2\sqrt{n} \sin(3n)} \text{ CONVERGE,}$$

E QUINDI, GRAZIE A (3), ANCHE LA SERIE DI PARTENZA CONVERGE.

PER CHIUDERE L'ARGOMENTAZIONE CI RIMANE DA DIMOSTRARE CHE:

$$\sum \frac{(-1)^n \sin(3n)}{4n} \text{ CONVERGE.}$$

A TALE SCOPO, PER APPLICARE IL CRITERIO DI ABEL, BASTA DIMOSTRARE CHE LA SUCCESSIONE (B_n) DEFINITA DA $\sum_{k=1}^n (-1)^k \sin(3k)$ È LIMITATA. A TALE SCOPO

OSSERVIAMO CHE:

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \sin(3k) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} \left((-e^{3i})^k \right) \right| = \left| \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n (-e^{3i})^k \right) \right| = \left| \operatorname{Im} \left(-e^{3i} \cdot \frac{1 - (-e^{3i})^n}{1 - e^{3i}} \right) \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{3i}|}$$

QUINDI SI PUÒ APPLICARE IL CR. DI ABEL.

ESIBENDO UN CONTROESEMPIO

5 DATA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $\mathbb{R}$, DIMOSTRARE O CONFUTARE LE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

a $\sum a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow \sum a_n^2$ CONVERGE

b $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n^2$ CONVERGE

c $\sum n a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

(FACOLTATIVO) $\rightarrow$ **d** $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n^3$ CONVERGE

SVOLGIMENTO

a **VERA** INFATTI:

$$\left(\sum |a_n| \text{ CONVERGE} \right) \Rightarrow \left(|a_n| \rightarrow 0 \right) \Rightarrow \left(\text{DEF. IN } n \ |a_n| < 1 \right) \Rightarrow \left(\text{DEF. IN } n \ 0 \leq a_n^2 \leq |a_n| \right)$$

QUINDI, PER IL CR. DEL CONFRONTO, DALLA CONVERGENZA DI $\sum |a_n|$ SEGUE QUELLA DI $\sum a_n^2$.

b **FALSA** CONTROESEMPIO: $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CONVERGE MA $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum \frac{1}{n}$ DIVERGE

c **VERA** INFATTI, POSTO $b_n = n a_n$, EQUIVALE A DIRE CHE:

$$\sum b_n \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum \frac{b_n}{n} \text{ CONVERGE}$$

MA QUESTO SEGUE SUBITO DAL CR. DI ABEL, PERCHÉ SE $\sum b_n$ CONVERGE ALLORA

LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE HA LIMITE FINITO QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, È LIMITATA.

d **FALSA** PRESA $a_n = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{n}} & \text{SE } n \text{ È UN QUADRATO PERFETTO} \\ -\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^{\frac{5}{3}}} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

MOSTRIAMO CHE $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ CONVERGE MA $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n^3$ DIVERGE A $+\infty$

MOSTRIAMO PRIMA CHE $\sum a_n^3$ DIVERGE A $+\infty$

SI HA:

(5)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \max\{a_n^3, 0\} = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right)^3 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{8}{k} = \text{DIVERGE A } +\infty$$

PER QUANTO RIGUARDA I TERMINI NEGATIVI SI OSSERVA CHE

$$0 \geq \min\{a_n^3, 0\} \geq \left(-\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = -\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^{\frac{1}{3}}} \geq -\frac{1}{(\sqrt{n}-1)^{\frac{1}{3}}} \approx -\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

DA CUI SEGUE CHE:

(6)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \min\{a_n^3, 0\} \text{ CONVERGE}$$

METTENDO INSIEME (5) E (6) SI OTTIENE CHE $\sum a_n^3$ DIVERGE A $+\infty$.

MOSTRIAMO CHE $\sum a_n$ CONVERGE.

SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE, VOGLIAMO MOSTRARE CHE (S_n) HA LIMITE FINITO.

PRIMA MOSTRIAMO CHE (S_{k^2}) HA LIMITE FINITO. SI HA:

$$\begin{aligned} S_{k^2} &= \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{p=m^2+1}^{(m+1)^2} a_p = \sum_{m=1}^{k-1} \left(-\frac{1}{m^{\frac{1}{3}}} \left((m+1)^2 - 1 - m^2 - 1 \right) + \frac{2}{\sqrt{m+1}} \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{k-1} \left(-\frac{1}{m\sqrt{m}} \cdot (2m-1) + \frac{2}{\sqrt{m+1}} \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{k-1} \left(\frac{1}{m\sqrt{m}} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{m+1}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \right) = \\ &= -2 + \frac{2}{\sqrt{k}} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m\sqrt{m}} \end{aligned}$$

TELESCOPICA

PERCHÉ $\sum \frac{1}{m\sqrt{m}}$ CONVERGE

QUINDI:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{k^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{2}{\sqrt{k}} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m\sqrt{m}} \right) = -2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}} = \text{ESISTE FINITO}$$

QUINDI (S_{k^2}) HA LIMITE FINITO l .

MA ANCHE (S_{k^2-1}) HA LIMITE l PERCHÉ:

$$S_{k^2-1} = S_{k^2} - a_{k^2} \rightarrow l - 0 = l$$

INFINE, VISTO CHE I TERMINI DI a_n SONO NEGATIVI SE n NON È UN QUADRATO,

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ TALE CHE $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$ SI HA:

$$S_{(k+1)^2-1} \leq S_n \leq S_{k^2}$$

QUINDI TUTTA (S_n) TENDE AD l .