

Analisi Matematica (II modulo) - Sim. 4

Titolo nota

15/08/2014

Prova simulata su: Successioni di Funzioni - docente: Prof. E. Callegari - Univ. di Roma Tor Vergata

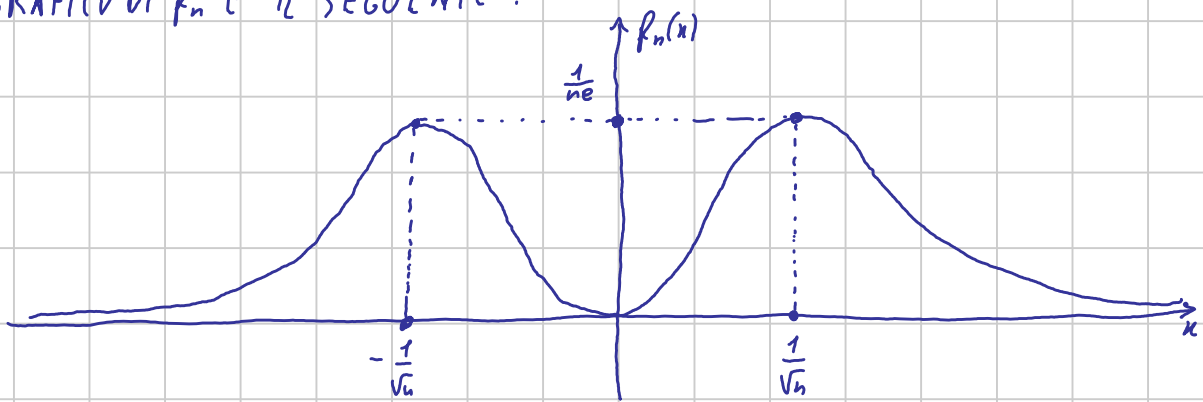
SOLUZIONI

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = x^2 e^{-nx^2}$.

di (f_n) studiare la convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

il grafico di f_n è il seguente:



quindi, se indichiamo con f la funzione identicamente nulla, su tutto $\mathbb{R}$ si ha:

$$d(f_n, f) = \frac{1}{n \cdot e} \rightarrow 0$$

quindi $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $\mathbb{R}$, e quindi anche puntualmente.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ sia $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^4 x^4}}{1+(x+n)^2}$.

di (f_n) studiare la convergenza: **a** PUNTUALE

b UNIFORME SUI COMPATTI

c UNIFORME SU $\mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

a si osservi che, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^4 x^4}}{1+(x+n)^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^4} + x^4}}{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{x}{n} + 1\right)^2} \rightarrow x^2 \quad \text{PER } n \rightarrow +\infty$$

QUINDI, POSTO $f(x) = x^2$, ABBIAMO CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

b POSTA $g_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^4} + x^4}$ È SEMPLICE VERIFICARE CHE $g_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$, E QUINDI ANCHE SUGLI INSIEMI DEL TIPO $[-a, a]$. INFATTI

$$d(g_n, f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{\frac{1}{n^4} + x^4} - x^2 \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n^4}}{\sqrt{\frac{1}{n^4} + x^4} + x^2} = \frac{1}{n^2}$$

PER MOSTRARE CHE $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $[-a, a]$ BASTERÀ DUNQUE MOSTRARE CHE SU $[-a, a]$ $d(f_n, g_n) \rightarrow 0$, PER $n \rightarrow +\infty$.

$\forall x \in [-a, a]$ SI HA:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - g_n(x)| &= \left| \sqrt{\frac{1}{n^4} + x^4} \cdot \left| \frac{1}{\frac{1}{n^2} + (\frac{x}{n} + 1)^2} - 1 \right| \right| = \sqrt{\frac{1}{n^4} + x^4} \cdot \left| \frac{-\frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{n^2} - \frac{2x}{n}}{\frac{1}{n^2} + (\frac{x}{n} + 1)^2} \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n^4} + x^4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n} + \frac{x^2}{n} + 2|x|}{\frac{1}{n^2} + (\frac{x}{n} + 1)^2} \stackrel{\text{PER } n > a}{\leq} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n^4} + a^4} \cdot \frac{\frac{1}{n} + \frac{a^2}{n} + 2a}{\frac{1}{n^2} + (1 - \frac{a}{n})^2} \end{aligned}$$

QUINDI SU $[-a, a]$, NON APPENA $n > a$, SI HA:

$$d(f_n, g_n) \leq \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n^4} + a^4} \cdot \frac{\frac{1}{n} + \frac{a^2}{n} + 2a}{\frac{1}{n^2} + (1 - \frac{a}{n})^2} \rightarrow 0 \cdot \sqrt{0 + a^4} \cdot \frac{0 + 0 + 2a}{0 + (1 - 0)^2} = 0$$

QUINDI, RICORDANDO CHE $g_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE, POSSIAMO DIRE CHE SU $[-a, a]$ ANCHE $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

c PER MOSTRARE CHE SU $\mathbb{R}$ NON C'È CONV. UNIFORME BASTA OSSERVARE CHE

$$d(f_n, f) \geq |f_n(n) - f(n)| = \left| \frac{\sqrt{1+n^4}}{1+n^2} - n^2 \right| = n^2 \cdot \left| \frac{\sqrt{\frac{1}{n^4} + 1}}{\frac{1}{n^2} + 1} - 1 \right| \rightarrow (+\infty) \cdot \left| \frac{1}{1} - 1 \right| = +\infty$$

3 $\forall n \in \mathbb{N}$ SIA $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA DA $f_n(x) = \frac{|x|^n}{|x|^n + |x+2|}$

DI (f_n) STUDIARE LA CONVERGENZA:

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|
| a PUNTUALE | d UNIFORME SU $[-1, 1]$ |
| b UNIFORME SU $[0, 2]$ | e UNIFORME SU $(-1, 1)$ |
| c UNIFORME SU $[2, +\infty)$ | |

SVOLGIMENTO

a SI OSSERVI CHE SI HA:

$$f_n(-1) = \frac{|-1|^n}{|-1|^n + |-1+2|^n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

INVECE PER $x > -1$, SI HA:

PERCHÉ PER OGNI FISSATO $x > -1$
SI HA $(1 - \frac{2}{x+2}) \in (-1, 1)$

(0) $0 \leq f_n(x) = \frac{|x|^n}{|x|^n + |x+2|^n} \leq \frac{|x|^n}{|x+2|^n} = \left| \frac{x}{x+2} \right|^n = \left| 1 - \frac{2}{x+2} \right|^n \rightarrow 0$

INFINE, PER $x < -1$ SI HA:

PERCHÉ PER OGNI FISSATO $x < -1$
SI HA $(1 + \frac{2}{x}) \in (-1, 1)$

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{|x|^n + |x+2|^n} = \frac{1}{1 + \left| \frac{x+2}{x} \right|^n} = \frac{1}{1 + \left| 1 + \frac{2}{x} \right|^n} \rightarrow \frac{1}{1 + 0} = 1$$

QUINDI, POSTO:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{PER } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{PER } x = -1 \\ 0 & \text{PER } x > -1 \end{cases}$$

SI HA CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

b SE $x \in [0, 2]$ LA (0) DIVENTA:

$$0 \leq f_n(x) \leq \left| 1 - \frac{2}{x+2} \right|^n \leq \left| 1 - \frac{2}{2+2} \right|^n = \frac{1}{2^n}$$

QUINDI, SU $[0, 2]$ SI HA:

$$d(f_n, f) \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

QUINDI $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $[0, 2]$.

c SI NOTI CHE, PER OGNI FISSATO $n \in \mathbb{N}$, SI HA:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{|x|^n + |x+2|^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \left| 1 + \frac{2}{x} \right|^n} = \frac{1}{2}$$

QUESTO, COMBINATO COL FATTO CHE $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, IMPLICA CHE SU $[0, +\infty)$ SI HA:

$$d(f_n, f) \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

QUINDI $d(f_n, f) \not\rightarrow 0$, CIOÈ NON C'È CONVERGENZA UNIFORME.

d LA CONVERGENZA SU $[-1, 1]$ NON PUÒ ESSERE UNIFORME PERCHÉ LE f_n SONO TUTTE CONTINUE MENTRE f È DISCONTINUA PER $x = -1$.

e SU $[-1, 1]$ E $(-1, 1)$ $d(f_n, f)$ FORNISCE LO STESSO VALORE PERCHÉ

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in (-1, 1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (-1, 1)} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \sup_{x \in (-1, 1)} |f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

PERCHÉ SIA f SIA TUTTE LE f_n SONO CONTINUE IN $x = 1$

PERCHÉ $\forall n \in \mathbb{N}$
 $f_n(-1) = \frac{1}{2} = f(-1)$

QUINDI SE $d(f_n, f) \rightarrow 0$ SU $[-1, 1]$, LO STESSO ACCADE SU $(-1, 1)$.

QUINDI NEHMEMO SU $(-1, 1)$ C'È CONV. UNIFORME.

4 SIA (f_n) LA STESSA SUCCESSIONE DEL QUESITO **3**. CALCOLARE:

a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 f_n(x) dx$

b $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx$

c $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \sqrt{n} \cdot f_n(x) dx$

SVOLGIMENTO

a VISTO CHE $f_n \rightarrow 0$ UNIFORMEMENTE SU $[0, 2]$, SI PUÒ PASSARE AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE OTTENENDO:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 f_n(x) dx = \int_0^2 0 dx = 0$$

b LA CONVERGENZA SU $[-1, 1]$ NON È UNIFORME PERÒ LO È SU TUTTI GLI INTERVALLI DEL TIPO $[-1+\delta, 1]$, CON $\delta > 0$. PER DIMOSTRARLO, BASTA FARLO PER GLI INTERVALLI DEL TIPO $[-\alpha, 0]$ CON $0 < \alpha < 1$, VISTO CHE SU $[0, 2]$ CE L'HÒ GIÀ.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE SU $[-\alpha, 0]$ LA **(0)** DIVENTA:

(1) $0 \leq f_n(x) \leq \left| \frac{x}{x+2} \right|^n = \left(\frac{|x|}{x+2} \right)^n \leq \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \right)^n \leq \alpha^n$

PERCHÉ $0 < \alpha < 1$
E $x \in [-\alpha, 0]$

QUINDI SU $[-a, 0]$, CON $0 < a < 1$, SI HA:

$$(2) \quad d(f_n, f) \leq a^n \rightarrow 0$$

QUINDI LA CONVERGENZA È UNIFORME.

PER QUANTO GIÀ SPIEGATO, POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $f_n \rightarrow 0$ UNIF. SU TUTTI

GLI INTERVALLI DI TIPO $[-1+\delta, 1]$, CON $\delta > 0$.

DETTO CIÒ MOSTRIAMO CHE $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = 0$.

BASTERÀ MOSTRARE CHE:

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ DEFINIT. IN } n \quad 0 \leq \int_{-1}^1 f_n(x) dx \leq \varepsilon$$

A TALE SCOPO $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, 0) < \frac{\varepsilon}{4}$ SU $[-1+\frac{\varepsilon}{2}, 1]$

(POSSIAMO FARLO PERCHÉ $f_n \rightarrow 0$ UNIF. SU $[-1+\frac{\varepsilon}{2}, 1]$).

MA ALLORA, PER $n \geq n_0$ SI HA:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-1}^1 f_n(x) dx &= \int_{-1}^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} f_n(x) dx + \int_{-1+\frac{\varepsilon}{2}}^1 f_n(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-1+\frac{\varepsilon}{2}}^1 d(f_n, 0) dx = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot d(f_n, 0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot d(f_n, 0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

QUINDI VALE (3).

c MOSTRIAMO CHE IL LIMITE È 0. SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \sqrt{n} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} \sqrt{n} f_n(x) dx + \int_{-1+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^0 \sqrt{n} f_n(x) dx + \int_0^1 \sqrt{n} f_n(x) dx \right).$$

MOSTRIAMO, SEPARATAMENTE, CHE I 3 PEZZI TENDONO A 0.

PRIMO PEZZO:

$$0 \leq \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} \sqrt{n} \cdot f_n(x) dx \leq \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} \sqrt{n} \cdot 1 dx = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

SECONDO PEZZO:

$$0 \leq \int_{-1+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^0 \sqrt{n} \cdot f_n(x) dx \leq \int_{-1+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}^0 \sqrt{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^n dx \leq \sqrt{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

VALE DEF. IN n PERCHÉ
 $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \rightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

$$\sqrt[n]{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 0 \quad \text{PER } n \rightarrow +\infty$$

TERZO PEZZO:

$$0 \leq \int_0^1 \sqrt[n]{n} f_n(x) dx = \int_0^1 \sqrt[n]{n} \frac{|x|^4}{|x|^n + |x+2|^n} dx \leq \int_0^1 \sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{2^n} dx = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n} \rightarrow 0$$

5 $\forall n \in \mathbb{N}$ SIA $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA DA $f_n(x) = n \cdot e^{-(x+\frac{1}{n})^2} - \sqrt{n^2+n} \cdot e^{-x^2}$

DI (f_n) STUDIARE LA CONVERGENZA: **a** PUNTUALE

b UNIFORME SU $\mathbb{R}$

SVOLGIMENTO

a DETTA $g(x) = e^{-x^2}$, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA:

$$\begin{aligned} (4) \quad f_n(x) &= n g\left(x + \frac{1}{n}\right) - \sqrt{n^2+n} g(x) = n g\left(x + \frac{1}{n}\right) - n g(x) + n g(x) - \sqrt{n^2+n} g(x) = \\ &= \frac{g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)}{\frac{1}{n}} + (n - \sqrt{n^2+n}) g(x) = \\ &= \frac{g\left(x + \frac{1}{n}\right) - g(x)}{\frac{1}{n}} - \frac{n}{n + \sqrt{n^2+n}} g(x) \end{aligned}$$

QUINDI, PER OGNI FISSATO $x \in \mathbb{R}$, SI HA:

$$f_n(x) \rightarrow g'(x) - \frac{1}{2} g(x)$$

QUINDI, POSTO $f(x) = g'(x) - \frac{1}{2} g(x)$, AVREMO CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE SU $\mathbb{R}$.

b MOSTRIAMO CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE:

$$g'(x) = -2x e^{-x^2} \quad \text{E} \quad g''(x) = 2(2x^2 - 1) e^{-x^2}$$

POICHÉ $g''(x) \rightarrow 0$ PER $x \rightarrow \pm\infty$, ESISTERÀ $L > 0$ T.C. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |g''(x)| \leq L$.

TALE L È LA COSTANTE DI LIPSCHITZ DI g' .

ORA, GRAZIE AL T. DI LAGRANGE, LA (4) DIVENTA:

$$f_n(x) = g'(\xi_n) - \frac{n}{n + \sqrt{n^2 + n}} g(x) \quad \text{con } x < \xi_n < x + \frac{1}{n}$$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0$, PRESO $n_0 > \max \left\{ \frac{2L}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ E $\forall n \geq n_0$ SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| g'(\xi_n) - \frac{n}{n + \sqrt{n^2 + n}} g(x) - g'(x) + \frac{1}{2} g(x) \right| \leq$$

$$\leq |g'(\xi_n) - g'(x)| + \left| \frac{1}{2} - \frac{n}{n + \sqrt{n^2 + n}} \right| \cdot |g(x)| \leq$$

$$\leq L \cdot |\xi_n - x| + \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{n + \sqrt{n^2 + n}} \cdot |g(x)| \leq$$

$$\leq L \cdot \frac{1}{n} + \frac{n}{(n + \sqrt{n^2 + n})^2} \cdot 1 \leq$$

PERCHÉ
 $g(x) = e^{-x^2}$

$$\leq L \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{4n} \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon$$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0$ DEF. IN n $d(f_n, f) \leq \varepsilon$.

QUINDI $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.