Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 5

Titolo nota

Prova simulata su: Elementi di EquaDiff. - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

SOLUZIONI

QUESTA È UNA BOZZA CHE NON HO RICONTROLLATO ABBASTANZA E QUINDI POTREBBE CONTENERE DEGLI ERRORI. RINGRAZIO IN ANTICIPO CHI ME LI SEGNALERÀ

1 TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY: $\begin{cases} y' = \dfrac{e^{x-y}}{2-e^x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

SVOLGIMENTO

VISTO CHE $e^{-y} \neq 0$ PER OGNI $y \in \mathbb{R}$, $y(x)$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE SE E SOLO SE:

$$e^{y(x)} y'(x) = \frac{e^x}{2-e^x}$$

CIOÈ:

$$\left(e^{y(x)}\right)' = \left(-\ln|e^x - 2|\right)'$$

CIOÈ

(1) $$e^{y(x)} = -\ln|e^x - 2| + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

POICHÉ L'EQUADIFF. HA SENSO SOLO PER $x \neq \ln 2$ E IL DATO INIZIALE DEL PROB. DI CAUCHY È DATO PER $x=0$, LA SOLUZIONE CERCATA $(I, y(x))$ DEVE AVERE $I \subset (-\infty, \ln 2)$.

QUINDI LA (1), PER $x < \ln 2$, DIVENTA:

$$e^{y(x)} = -\ln(2-e^x) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$y(x) = \ln\left(C - \ln(2-e^x)\right) \qquad C \in \mathbb{R}$$

PERCHÉ SIA $y(0)=1$, BISOGNA CHE:

$$1 = \ln\left(c - \ln(2-e^0)\right)$$

CIOÈ $c = e$. QUINDI LA SOL. CERCATA È:

$$y(x) = \ln\left(e - \ln(2-e^x)\right)$$

IL CUI INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA È $(-\infty, \ln 2)$.

2 TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:
$$\begin{cases} y' + y\ln x = x^{1-x} \\ y(1) = -2 - \frac{1}{e} \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

L'OMOGENEA ASSOCIATA:

$$y' + y \cdot \ln x = 0$$

HA SOLUZIONE GENERALE:

(2) $$y(x) = c\, e^{-A(x)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

DOVE:

$$A(x) = \int \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx = x\ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x$$

QUINDI LA **(2)** DIVENTA:

(3) $$y(x) = c\, e^{-x\ln x + x} = c\, x^{-x} \cdot e^{x} \qquad c \in \mathbb{R}$$

PER TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ DELLA NON OMOGENEA USIAMO IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI, CERCHIAMO DUNQUE $y_0(x)$ DELLA FORMA:

(4) $$y_0(x) = c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x}$$

SOSTITUENDO $y_0(x)$ NELL'EQUAZIONE SI HA:

(5) $$\left(c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x} \right)' + c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x} \cdot \ln x = x^{1-x}$$

MA SICCOME:

$$\left(c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x} \right)' = c'(x) \cdot x^{-x} \cdot e^{x} + c(x) \cdot \left(e^{x - x\ln x} \right)' =$$

$$= c'(x) \cdot x^{-x} e^{x} + c(x) \cdot e^{x - x\ln x} \cdot \left(1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} \right) =$$

$$= c'(x) \cdot x^{-x} e^{x} - c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x} \cdot \ln x$$

LA **(5)** DIVENTA:

$$c'(x)\, x^{-x} e^{x} - \cancel{c(x)\, x^{-x} e^{x} \ln x} + \cancel{c(x)\, x^{-x} e^{x} \ln x} = x^{1-x}$$

DA CUI SEGUE:

$$c'(x) \cdot x^{-x} \cdot e^{x} = x^{1-x}$$

CIOÈ:

$$C'(x) = x e^{-x}$$

QUINDI BASTA PRENDERE:

$$C(x) = \int x e^{-x} dx = \int x (-e^{-x})' dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} = -(x+1) e^{-x}$$

QUINDI LA SOL. PARTICOLARE CERCATA **(4)** È:

$$y_0(x) = -(x+1) e^{-x} \cdot x^{-x} \cdot e^{x} = -(x+1) x^{-x}$$

QUINDI LA SOL. GENERALE DELL'EQUAZIONE È

$$y(x) = -(x+1) x^{x} + c\, x^{-x} e^{x} \qquad c \in \mathbb{R}$$

PER SODDISFARE IL DATO INIZIALE $y(1) = -2 - \frac{1}{e}$, BISOGNA CHE SIA:

$$-2 - \frac{1}{e} = -(1+1) 1^{1} + c \cdot 1^{-1} \cdot e^{1}$$

DA CUI SEGUE $c = -\frac{1}{e^2}$. QUINDI LA SOL DEL PROB. DI CAUCHY È:

$$y(x) = -(x+1) x^{x} - x^{x} e^{x-2}$$

CHE HA COME INTERVALLO MASSIMALE DI PROLUNGABILITÀ $(0, +\infty)$.

---

3 TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY: $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \dfrac{2 \ln x}{x e^{x}} \\ y(1) = \dfrac{1}{e} \\ y'(1) = -\dfrac{2}{e} \end{cases}$

SVOLGIMENTO

L'OMOGENEA ASSOCIATA È:

(6) $$y'' + 2y' + y = 0$$

IL CUI POL. CARATTERISTICO È

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

QUINDI LA SOL GENERALE DI **(6)** È:

$$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x}$$

QUINDI, SE VOGLIO USARE IL METODO DELLA VAR. DELLE COSTANTI PER TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ DELLA NON OMOGENEA, AVRÒ CHE $y_0(x)$ È DELLA FORMA

(7) $$y_0(x) = \alpha(x) e^{-x} + \beta(x) \cdot x e^{-x}$$

CON $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ TALI CHE:

$$\begin{cases} e^{-x}\alpha'(x) + x e^{-x}\beta'(x) = 0 \\ -e^{-x}\alpha'(x) + (1-x)e^{-x}\beta'(x) = \dfrac{2\ln x}{x e^{x}} \end{cases}$$

CIOÈ TALI CHE:

$$\begin{cases} \beta'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} \\ \alpha'(x) = -2\ln x \end{cases}$$

QUINDI UNA POSSIBILE SCELTA PER $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ È:

$$\alpha(x) = \int -2\ln x\, dx = -2\int (x)'\ln x = -2x\ln x + 2x$$

$$\beta(x) = \int \frac{2\ln x}{x} = \ln^2 x$$

QUINDI LA **(7)** È:

$$Y_0(x) = -2x(\ln x + 1)e^{-x} + \ln^2 x \cdot x e^{-x} = (\ln^2 x - 2\ln x - 2)\, x e^{-x}$$

DI CONSEGUENZA, LA SOL GENERALE DELLA NON OMOGENEA È:

$$Y(x) = (\ln^2 x - 2\ln x \boxed{-2})\, x e^{-x} + \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

SI PUÒ ANCHE TOGLIERE, INGLOBANDOLO IN β

CERCHIAMO ORA $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ IN MODO DA SODDISFARE I DATI INIZIALI. SI HA:

$$y'(x) = (2\ln x - 2)e^{-x} + (\ln^2 x - 2\ln x)(e^{-x} - xe^{-x}) - \alpha e^{-x} + \beta(e^{-x} - xe^{-x})$$

QUINDI LE CONDIZIONI:

$$\begin{cases} y(1) = \frac{1}{e} \\ y'(1) = -\frac{2}{e} \end{cases}$$

DIVENTANO

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{e} + \frac{\beta}{e} = \frac{1}{e} \\ -\frac{2}{e} - \frac{\alpha}{e} + 0\cdot\beta = -\frac{2}{e} \end{cases}$$

CIOÈ $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

QUINDI LA $Y(x)$ CERCATA È

$$Y(x) = (\ln^2 x - 2\ln x + 1)\, x e^{-x}$$

4 DATA L'EQUAZIONE DIFF.

$$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = e^{x} - \sin x + 2\cos^2 x$$

a TROVARE LA SOL GENERALE

b QUALI SOLUZIONI SONO LIMITATE SU $(-\infty, 0]$?

SVOLGIMENTO

a PRIMA SCRIVIAMO MEGLIO IL SECONDO MEMBRO, OSSERVANDO CHE

$$2\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = \cos(2x) + 1$$

QUINDI L'EQUAZIONE DIVENTA:

(8) $$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = e^{x} - \sin x + \cos 2x + 1$$

LA SUA OMOGENEA ASSOCIATA È:

(9) $$y^{(5)}+y^{(4)}-y''-y'=0$$

CHE HA POL. CARATTERISTICO DATO DA:

$$p(\lambda)=\lambda^5+\lambda^4-\lambda^2-\lambda=\lambda^4(\lambda+1)-\lambda(\lambda+1)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

QUINDI LE SUE RADICI SONO

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=-1 \quad \lambda_4=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \lambda_5=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

DA CUI SEGUE CHE LA SOL. GENERALE DI (9) È:

$$y(x)=\alpha+\beta e^x+\gamma e^{-x}+\delta e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\rho e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\rho\in\mathbb{R}$$

CERCHIAMO ORA UNA SOL. PARTICOLARE $y_1(x)$ DELL'EQ. NON OMOGENEA

(10) $$y^{(5)}+y^{(4)}-y''-y'=e^x$$

VISTO CHE $\lambda=1$ COMPARE TRA LE RADICI DI $p(\lambda)$ CON MOLTEPLICITÀ 1, CERCHIAMO $y_1(x)$ DELLA FORMA:

(11) $$y_1(x)=\alpha x e^x$$

PER SOSTITUIRE (11) IN (10), CALCOLIAMONE LE DERIVATE:

$$y_1'(x)=\alpha(x+1)e^x$$
$$y_1''(x)=\alpha(x+2)e^x$$
$$\vdots$$
$$y_1^{(4)}(x)=\alpha(x+4)e^x$$
$$y_1^{(5)}(x)=\alpha(x+5)e^x$$

SOSTITUENDO IN (10) SI OTTIENE:

$$\alpha(\cancel{x}+5)e^x+\alpha(\cancel{x}+4)e^x-\alpha(\cancel{x}+2)e^x-\alpha(\cancel{x}+1)e^x=e^x$$

CIOÈ:

$$6\alpha e^x=e^x$$

DA CUI SEGUE $\alpha=\frac{1}{6}$, E QUINDI

(12) $$y_1(x)=\frac{1}{6}xe^x$$

ANALOGAMENTE SIA $y_2(x)$ LA SOL. DI

(13) $$y^{(5)}+y^{(4)}-y''-y'=-\sin x$$

POICHÈ $\lambda=i$ NON È TRA LE RADICI DI $p(\lambda)$, CERCO $y_2(x)$ DELLA FORMA:

$$y_2(x)=A\cos x+B\sin x$$

ABBIAMO:

$$y_2'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$y_2''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

$$y_2'''(x) = A\sin x - B\cos x$$

$$y_2^{(4)}(x) = A\cos x + B\sin x = y_2(x)$$

$$y_2^{(5)}(x) = y_2'(x)$$

QUINDI, SOSTITUENDO IN **(13)** $y^{(5)}$ E $-y'$ SI CANCELLANO E SI OTTIENE:

$$A\cos x + B\sin x + A\cos x + B\sin x = -\sin x$$

CIOÈ:

$$2A\cos x + 2B\sin x = -\sin x$$

DA CUI SEGUE $A=0$ E $B=-\frac{1}{2}$, QUINDI:

(14) $$y_2(x) = -\frac{1}{2}\sin x$$

CERCHIAMO ORA LA SOL. PARTICOLARE $y_3(x)$ DI:

(15) $$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = \cos(2x)$$

SICCOME $\lambda = 2i$ NON È RADICE DI $P(\lambda)$, CERCO $y_3(x)$ DELLA FORMA:

$$y_3(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

ABBIAMO:

$$y_3'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$y_3''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x = -4y_3(x)$$

$$y_3'''(x) = -4y_3'(x)$$

$$y_3^{(4)}(x) = -4y_3''(x) = 16y_3(x)$$

$$y_3^{(5)}(x) = 16y_3'(x)$$

QUINDI, SOSTITUENDO IN **(15)**, SI HA:

$$-32A\sin 2x + 32B\cos 2x + 16A\cos 2x + 16B\sin 2x + 4A\cos 2x + 4B\sin 2x + 2A\sin 2x - 2B\cos 2x = \cos 2x$$

CIOÈ:

$$(-30A + 20B)\sin 2x + (30B + 20A)\cos 2x = \cos 2x$$

DA CUI SEGUE:

$$\begin{cases} -30A + 20B = 0 \\ 30B + 20A = 1 \end{cases}$$

CIOÈ $A = \frac{1}{65}$ E $B = \frac{3}{130}$ E, DI CONSEGUENZA:

(16) $$y_3(x) = \frac{1}{65}\cos 2x + \frac{3}{130}\sin 2x$$

INFINE TROVIAMO LA SOL. PARTICOLARE $y_4(x)$ DI

(17) $$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = 1$$

VISTO CHE $\lambda = 0$ È RADICE DI $P(\lambda)$ CON MOLTEPLICITÀ 1, CERCHIAMO $y_4(x)$ DELLA FORMA:

$$y_4(x) = C x .$$

SOSTITUENDO IN **(17)** SI OTTIENE:

$$-C = 1$$

QUINDI:

$$y_4(x) = -x$$

LA SOL. GENERALE DELL'EQ. NON OMOGENEA INIZIALE È:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + \alpha + \beta e^{x} + \gamma e^{-x} + \delta e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \rho e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\rho \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$y(x) = \frac{1}{6}x e^{x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{65}\cos 2x + \frac{3}{130}\sin 2x - x + \alpha + \beta e^{x} + \gamma e^{-x} + \delta e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \rho e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

CON $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho \in \mathbb{R}$.

b NON C'È ALCUN MODO DI SCEGLIERE $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho \in \mathbb{R}$ IN MODO CHE $y(x)$ SIA LIMITATA SU $(-\infty, 0]$. INFATTI:

$$y(x) = -x + \gamma e^{-x} + \delta e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \rho e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \boxed{\text{PARTE SEMPRE LIMITATA SU } (-\infty, 0]}$$

SE TALE $y(x)$ RIMANE LIMITATA PER $x \to -\infty$ DEVE ESSERE $\gamma = 0$, ALTRIMENTI IL TERMINE DOMINANTE SAREBBE γe^{-x} E QUINDI $|y(x)| \to +\infty$ PER $x \to -\infty$.

A QUESTO PUNTO DEVE ESSERE ANCHE $\delta = 0$, ALTRIMENTI PRESO $x_n = -\frac{4\pi n}{\sqrt{3}}$ SI AVREBBE:

$$y(x_n) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot n + \delta e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot n} + \rho \cdot 0 + \boxed{\text{PARTE LIMITATA SU } (-\infty, 0]}$$

QUINDI SE NON FOSSE $\delta = 0$, PER $n \to +\infty$ SI AVREBBE $x_n \to -\infty$ MA $|y(x_n)| \to +\infty$.

ANALOGAMENTE SI MOSTRA CHE DEVE ESSERE ANCHE $\rho = 0$. QUINDI, PER ESSERE LIMITATA, DOVREBBE ESSERE:

$$y(x) = -x + \boxed{\text{PARTE LIMITATA SU } (-\infty, x]}$$

CHE PERÒ NON È LIMITATA A CAUSA DEL TERMINE $-x$, CHE RIMANE.

5 DATA L'EQUAZIONE DIFF.

$$y^{(8)} + 81y^{(5)} + 112y'' + 5y' + y = e^{-x}$$

a TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $y_0(x)$.

SVOLGIMENTO

STAVOLTA IL POL. CARATTERISTICO È

$$p(\lambda) = \lambda^8 + 81\lambda^5 + 112\lambda^2 + 5\lambda + 1$$

E NON È FACILE TROVARNE TUTTE LE RADICI, QUINDI NON SIAMO IN GRADO DI DETERMINARE LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA. TUTTAVIA, PER TROVARE UNA SOL. PARTIC. DELLA NON OMOGENEA COL METODO DEGLI ANNICHILATORI, NON C'È DAVVERO BISOGNO DI CONOSCERE TUTTE LE RADICI DI $p(\lambda)$. NEL NOSTRO CASO, VISTO CHE IL II° MEMBRO È e^{-x}, BASTA INFATTI CONTROLLARE CHE $\lambda=-1$ NON È RADICE DI $p(\lambda)$ PER POTER ESSERE SICURI CHE C'È UNA SOL. PARTICOLARE DEL TIPO:

$$y_0(x) = c\,e^{-x} \tag{18}$$

IL CONTROLLO CHE $\lambda=-1$ NON È RADICE DI $p(\lambda)$ È IMMEDIATO, VISTO CHE $p(-1) = 28 \neq 0$

QUINDI POSSIAMO CERCARE UNA SOL. DI TIPO **(18)** SOSTITUENDO NELLA NON OMOGENEA:

$$(ce^{-x})^{(8)} + 81(ce^{-x})^{(5)} + 112(ce^{-x})'' + 5(ce^{-x})' + ce^{-x} = e^{-x}$$

CHE EQUIVALE A:

$$ce^{-x} - 81ce^{-x} + 112ce^{-x} - 5ce^{-x} + ce^{-x} = e^{-x}$$

CIOÈ A:

$$28c\,e^{-x} = e^{-x}$$

DA CUI SEGUE: $c = \frac{1}{28}$.

QUINDI UNA SOL PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA È:

$$y_0(x) = \frac{1}{28}e^{-x}$$

---

6 ESISTE UNA EQ. LINEARE A COEFF. COSTANTI E REALI, DI ORDINE 11, OMOGENEA TALE CHE TUTTE LE SUE SOLUZIONI SONO LIMITATE?

SVOLGIMENTO

LA RISPOSTA È SI: BASTA FARE IN MODO CHE IL POL. CARATTERISTICO ABBIA 11 RADICI TUTTE DIVERSE E CON PARTE REALE ZERO. AD ESEMPIO:

$$P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda^2+4)(\lambda^2+9)(\lambda^2+16)(\lambda^2+25)\cdot\lambda$$

L'EQ. OMOGENEA CHE HA $P(\lambda)$ COME POL. CARATTERISTICO, HA COME BASE PER LO SPAZIO DELLE SOL. LA SEGUENTE.

$$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 4x, \cos 5x, \sin 5x\}$$

CHE SONO 11 FUNZIONI, TUTTE LIMITATE, QUINDI OGNI LORO COMB. LINEARE È LIMITATA.

$\boxed{7}$ TROVARE UN'EQ. DIFF. DEL TIPO $y' = f(y)$ AVENTE UNA SOLUZIONE $y(x)$ DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$ E TALE CHE $y(x) = -1$ PER OGNI $x \leq 1$ E $y(x) = 1$ PER OGNI $x \geq 2$.

SVOLGIMENTO

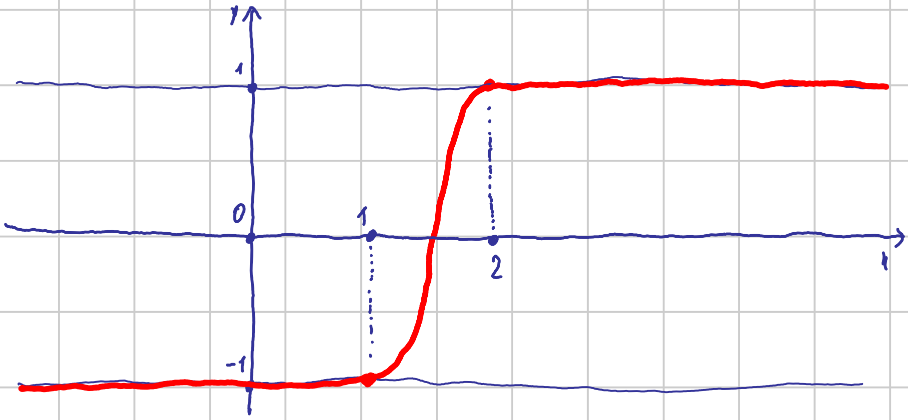
UN'EQUAZIONE CHE SODDISFA LE CONDIZIONI RICHIESTE È

$$y' = \pi\sqrt{1-y^2} \tag{19}$$

CHE HA, TRA LE SUE SOLUZIONI:

$$y(x) = \begin{cases} -1 & \text{PER } x \leq 1 \\ \sin\left(\pi\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\right) & \text{PER } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{PER } x \geq 2 \end{cases} \tag{20}$$

CHE VEDIAMO IN FIGURA:



PER DIMOSTRARE CHE LA NOSTRA AFFERMAZIONE È CORRETTA È SUFFICIENTE VERIFICARE CHE LA (20) È DI CLASSE C^1 E CHE SODDISFA LA (19). QUESTO COMPLETA LO SVOLGIMENTO.

SE PERÒ VOGLIAMO CAPIRE IN CHE MODO SI ARRIVI A DECIDERE DI PRENDERE (19), PUÒ ESSERE UTILE FARE ALCUNE OSSERVAZIONI:

OSS. 1 VISTO CHE PER $x \geq 2$ C'È LA SOL. COSTANTE $y_1(x) = 1$ SIGNIFICA CHE $f(1) = 0$

E, ANALOGAMENTE, DEVE ESSERE $f(-1) = 0$ PERCHÉ PER $x < 1$ C'È LA SOL COSTANTE $y_2(x) = -1$

OSS. 2 CI SERVE CHE PER $y=-1$ E $y=1$ NON VALGA IL TEOREMA DI UNICITÀ PERCHÉ DEVE ESSERCI UNA SOLUZIONE CHE "RACCORDA" LE 2 SOL. COSTANTI: NEI PUNTI DI "RACCORDO" NON CI DEVE ESSERE UNICITÀ DELLA SOLUZIONE. CIÒ VUOL DIRE CHE $f(y)$ NON DEVE ESSERE LOCALMENTE LIPSCHITZIANA PER $y=1$ E PER $y=-1$.

RIASSUMENDO: $f(y)$ DEVE AVERE LE PROPRIETÀ:

(a) $f(1)=0=f(-1)$

(b) f NON È LOCALMENTE LIPSCHITZIANA IN $y=1$ E $y=-1$.

LA PIÙ SEMPLICE FUNZIONE CHE SODDISFA (a) È $f(y)=y^2-1$, MA SE VOGLIAMO CHE SODDISFI ANCHE (b) DOBBIAMO FARE IN MODO CHE, QUANDO INTERSECA L'ASSE x, ABBIA PENDENZA INFINITA.

PER QUESTO PRENDIAMO $f(y)=\sqrt{|y^2-1|}$ CHE, SE $-1\leq y\leq 1$ SI SCRIVE $f(y)=\sqrt{1-y^2}$

A QUESTO PUNTO, CERCANDO LE SOLUZIONI DI

(21)
$$y'=\sqrt{1-y^2}$$

NELLA ZONA $-1<y<1$, TROVO CHE SONO TUTTE E SOLE LE TRASLATE ORIZZONTALI DI:

(22)
$$y(x)=\sin x \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

MI ACCORGO ALLORA CHE LE TRASLATE DI (22) VANNO "QUASI" BENE: PER PASSARE DA QUOTA -1 A QUOTA 1, LA (22) HA BISOGNO CHE LA L'INCREMENTO DI x SIA $\Delta x=\pi$, MENTRE A NOI SERVE CHE ACCADA QUANDO x PASSA DA $x=1$ A $x=2$, CIOÈ CON $\Delta x=1$.

INSOMMA CI SERVIREBBE CHE, AL POSTO DI (22), LE SOLUZIONI FOSSERO TUTTE E SOLE LE TRASLATE ORIZZONTALI DI:

(23)
$$y(x)=\sin \pi x \qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

QUINDI DOBBIAMO AGGIUSTARE L'EQUAZIONE (21) NEL MODO SEGUENTE:

(24)
$$y'=\pi\sqrt{1-y^2}$$

CHE HA APPUNTO (23) COME SOLUZIONE.

QUESTO SPIEGA IL MOTIVO DELLA SCELTA (19).

---

8 SIA $y(x)$ LA SOL. DEL PROB. DI CAUCHY

(25)
$$\begin{cases} y'=\dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}\ln\left(\dfrac{3}{2}+\sin y\right) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

a MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE A TUTTO $\mathbb{R}$.

b TROVARE $\ell \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \ell$.

c DIRE SE $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{7}{6}\pi$ OPPURE NO.

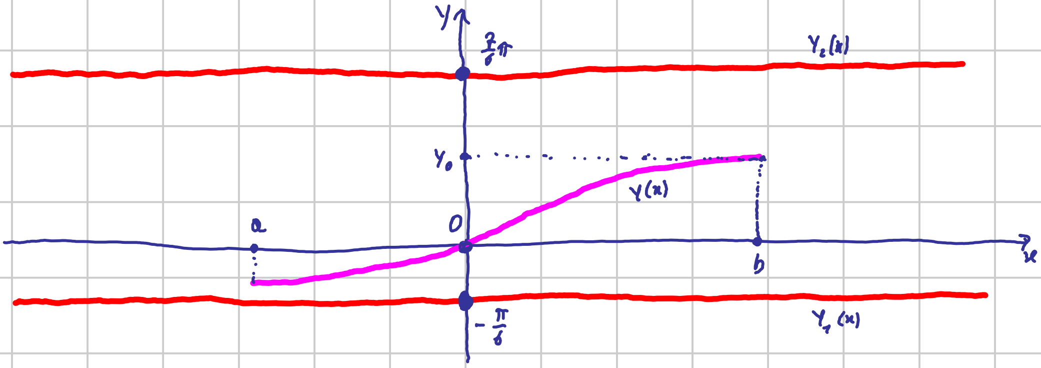
d (*) DETTO ℓ IL LIMITE TROVATO AL PUNTO **b**, DIRE PER QUALI k SI HA $|y(x)-\ell| = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ PER $x \to -\infty$.

SVOLGIMENTO

a TUTTI I VALORI DI y PER I QUALI $\sin y = -\frac{1}{2}$ DANNO LUOGO A SOL. COSTANTI. IN PARTICOLARE CI SONO LE 2 SOL. COSTANTI $y_1(x) = -\frac{\pi}{6}$ E $y_2(x) = \frac{7}{6}\pi$. VISTO CHE $y(x)$ SODDISFA $y(0)=0$, FINCHÉ È PROLUNGABILE RIMANE CONFINATA NELLA STRISCIA TRA $y_1(x)$ E $y_2(x)$. QUESTO PERCHÉ, GRAZIE AL TEO. DI UNICITÀ $y_1(x)$ E $y_2(x)$ NON POSSONO ESSERE INTERSECATE. SI NOTI CHE PER $-\frac{\pi}{6} < y < \frac{7}{6}\pi$ SI HA $\sin y > -\frac{1}{2}$ E QUINDI IL II° MEMBRO DI:

$$y' = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right)$$

È STRETTAMENTE POSITIVO. DI CONSEGUENZA, FINCHÉ ESISTE, $y(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE. LA SITUAZIONE È QUELLA DESCRITTA NELLA FIGURA SEGUENTE:



MOSTRIAMO ORA CHE L'INTERVALLO MASSIMALE DI DEFINIZIONE (a,b) È IN REALTÀ $(-\infty,+\infty)$.

AD ESEMPIO MOSTRIAMO CHE $b=+\infty$.

INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE PRENDIAMO:

$$y_0 = \lim_{x\to b^-} y(x)$$

ESISTE FINITO PERCHÉ $y(x)$ È CRESCENTE E LIMITATA

E CONSIDERIAMO IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\dfrac{3}{2} + \sin y\right) \\ y(b) = y_0 \end{cases}$$

E SIA $v \in C^1([b-\delta, b+\delta])$ LA SUA SOL. LOCALE.

MOSTRIAMO CHE:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x) & x \in (a,b) \\ v(x) & x \in [b, b+\delta) \end{cases}$$

RISOLVE L'EQ. DIFF. SU TUTTO $(a, b+\delta)$.

A TALE SCOPO, VISTO CHE SO GIÀ CHE $y(x)$ È SOL SU (a,b) E $v(x)$ SU $(b-\delta, b+\delta)$, BASTA VERIFICARE CHE $\tilde{y}(x)$ È CONTINUA E DERIVABILE ANCHE NEL PUNTO DI RACCORDO $x=b$. SI HA:

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0 = v(b) \qquad \text{QUINDI } \tilde{y}(x) \text{ È CONTINUA PER } x=b.$$

INOLTRE:

$$\lim_{x\to b^-} y'(x) = \lim_{x \to b^-} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y(x)\right) = \frac{2e^{-b}}{1+e^{-b}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y_0\right) = \frac{2e^{-b}}{1+e^{-b}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin(v(b))\right) = v'(b)$$

QUINDI $\tilde{y}(x)$ È ANCHE DERIVABILE PER $x=b$, E QUINDI $\tilde{y}(x)$ È UN PROLUNGAMENTO DI $y(x)$, IN CONTRASTO COL FATTO CHE $((a,b), y(x))$ SIA SOL. MASSIMALE.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE b NON SIA $+\infty$.

ANALOGAMENTE SI MOSTRA CHE $a = -\infty$.

QUINDI $y(x)$ È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

b OSSERVIAMO ORA CHE, GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $y(x)$, ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \ell \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right)$$

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\ell = -\frac{\pi}{6}$.

INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE, SI AVREBBE:

$$\lim_{x\to-\infty} y'(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y(x)\right) = 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \sin(\ell)\right) > 0$$

PERCHÉ STIAMO SUPPONENDO $\ell \neq -\frac{\pi}{6}$

DI CONSEGUENZA ESISTEREBBERO $x_0 < 0$ E $m > 0$ TALI CHE $y'(x) \geq m$ PER $x \leq x_0$.

QUINDI, $\forall x < x_0$ SI AVREBBE

$$y(x) = y(x_0) + y(x) - y(x_0) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = y(x_0) - \int_{x}^{x_0} y'(t)\,dt \leq y(x_0) - \int_x^{x_0} m\,dt = y(x_0) - m(x_0 - x)$$

DA CUI SEGUIREBBE

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) \leq \lim_{x \to -\infty} \left(y(x_0) - m(x_0 - x)\right) = -\infty$$

CHE È ASSURDO, VISTO CHE $y(x) \geq -\frac{\pi}{6}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE $\ell \neq -\frac{\pi}{6}$.

c INVECE $\lim_{x\to+\infty} y(x)$, CHE PURE ESISTE GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $y(x)$, NON VALE $\frac{7}{6}\pi$.

INFATTI OSSERVIAMO CHE, $\forall x \in \mathbb{R}$, SI HA:

$$y'(x) = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right) \leq \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + 1\right) < \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \ln e = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} < 2e^{-x}$$

QUINDI $\forall x > 0$ SI HA

$$y(x) = y(x) - 0 = y(x) - y(0) = \int_0^x y'(t)\,dt < \int_0^x 2e^{-t}\,dt = 2\left(-e^{-x} + e^0\right) = 2(1 - e^{-x}) < 2$$

QUINDI:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \ell < 2 < \frac{7}{6}\pi$$

$\boxed{d}$ PRIMA DI RISPONDERE AL QUESITO PREPARIAMOCI UNO STRUMENTO DA USARE:

$\boxed{\text{PROP. 1}}$ SIA $y_3(x)$ LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:

$$(26) \qquad \begin{cases} y' = G(y) \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

DOVE $G(y)$ È LIPSCHITZIANA E SODDISFA

$$G(y) < \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right) \qquad \forall x \leq -1 \quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right]$$

ALLORA, $\forall x \leq -1$ IN CUI $y_3(x)$ È DEFINITA SI HA $y_3(x) > y(x)$. (DOVE $y(x)$ È LA SOL. DI (25))

$\boxed{\text{DIMO}}$

SIA $(\alpha, -1]$ L'INSIEME DEGLI $x \leq 1$ SU CUI $y_3(x)$ È DEFINITA E SIA

$$A = \{ x \in (\alpha, -1] \mid y_3(x) \leq y(x) \}$$

(SI NOTI CHE $-1 \notin A$ PERCHÉ $y_3(-1) = 0$ E $y(-1) < 0$)

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE A È VUOTO.

SE COSÌ NON FOSSE, DETTO $\bar{x} = \sup A$, PER LA CONTINUITÀ DI $y_3(x)$ E $\tilde{y}(x)$ SI AVREBBE

$y(\bar{x}) = y_3(\bar{x})$, $\bar{x} < -1$ E (OVVIAMENTE) $y_3(x) > y(x)$ PER $x \in (\bar{x}, -1]$

MA ALLORA, $\forall x \in (\bar{x}, -1]$ SI AVREBBE

$$\frac{y(x) - y(\bar{x})}{x - \bar{x}} < \frac{y_3(x) - y_3(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

DA CUI, PASSANDO AL LIMITE PER $x \to \bar{x}^+$

$$y'(\bar{x}) \leq y_3'(\bar{x})$$

CHE È ASSURDO PERCHÉ:

$$y'(\bar{x}) = \frac{2e^{-\bar{x}}}{1+e^{-\bar{x}}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin(y(\bar{x}))\right) > G(y(\bar{x})) = G(y_3(\bar{x})) = y_3'(\bar{x})$$

ABBIAMO CIOÈ OTTENUTO UN ASSURDO SUPPONENDO A NON VUOTO.

QUINDI A È VUOTO, CIOÈ FINCHÉ ESISTE $y_3(x)$ RIMANE SOPRA DA $\tilde{y}(x)$.

QUESTO CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE DI $\boxed{\text{PROP. 1}}$

A QUESTO PUNTO CI SERVE UNA $G(y)$ CHE SODDISFI LE IPOTESI DELLA

$\boxed{\text{PROP. 1}}$ È PER LA QUALE LA SOLUZIONE $y_3(x)$ DEL PROB. DI CAUCHY (26) SI SCHIACCI ESPONENZIALMENTE SULL'ASINTOTO $y = -\frac{\pi}{6}$ PER $x \to -\infty$.

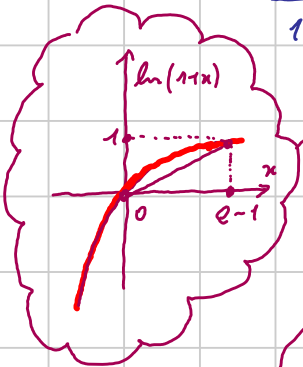
UNA $G(y)$ CHE VA BENE È:

$$G(y) = \frac{1}{4}\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$$

INFATTI PER OGNI $(x, y) \in (-\infty, -1] \times (-\frac{\pi}{6}, 0]$ SI HA:

PERCHÉ PER $x \leq -1$ $e^{-x} \geq e > 1$ QUINDI $\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} > \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+e^{-x}} = 1$

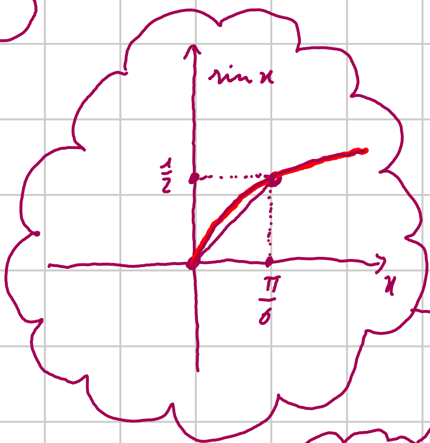
$$\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right) > \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right) \geq$$



$$\geq \frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{2} + \sin y\right) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sin y\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \sin\left(y + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right)\right) \geq$$



$$\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) \geq$$

PERCHÉ $-\frac{\pi}{6} < y \leq 0$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{\pi}\left(y + \frac{\pi}{6}\right) >$$

$$> \frac{1}{4}\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$$

QUINDI $G(y) = \frac{1}{4}\left(y + \frac{\pi}{6}\right)$ SODDISFA LA CONDIZIONE RICHIESTA DA $\boxed{\text{PROP. 1}}$.

TROVIAMO ORA LA SOLUZIONE $y_3(x)$ DI:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{4}\left(y + \frac{\pi}{6}\right) \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

VISTO CHE È LINEARE DEL I° ORDINE SI TROVA SUBITO:

$$y_3(x) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} e^{\frac{1}{4}(x+1)}$$

A QUESTO PUNTO SIAMO IN GRADO DI CONCLUDERE PERCHÉ $\forall x \leq -1$ SI HA:

GRAZIE ALLA $\boxed{\text{PROP. 1}}$

$$-\frac{\pi}{6} < Y(x) < Y_3(x)$$

QUINDI:

PER OGNI $k \in \mathbb{N}$

$$\left| Y(x)+\frac{\pi}{6} \right| < \left| Y_3(x)+\frac{\pi}{6} \right| = \frac{\pi}{6}\, e^{\frac{1}{4}(x-1)} = o\left(\frac{1}{x^k}\right) \quad \text{PER } x \to -\infty$$