Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 7

Titolo nota

Prova simulata sull'intero programma - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

SOLUZIONI

1 SIANO $f, F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ DEFINITE DA $f(x) = \arctan x^2$ E $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a DETERMINARE L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $F(x)$ PER $x \to 0^+$.

b DIRE SE PER $x \to +\infty$ $F(x)$ HA UN ASINTOTO OBLIQUO.

c $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ DEFINIAMO $f_n(x) = f(nx)$; STUDIARE LA CONVERGENZA UNIFORME DI (f_n) SUGLI INSIEMI $[1,+\infty)$, $[0,+\infty)$ E $(0,+\infty)$.

d $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ DEFINIAMO $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$; STUDIARE LA CONVERGENZA UNIFORME DI (F_n) SU $[0,+\infty)$.

SVOLGIMENTO

a L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $F(x)$ PER $x \to 0^+$ È 3. INFATTI:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

b PER $x \to +\infty$ C'È UN ASINTOTO OBLIQUO DEL TIPO $y = \frac{\pi}{2}x + q$, CON $q<0$.

INFATTI:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x^2) = \frac{\pi}{2}$$

E

$$q = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to+\infty} \left(\int_0^x \arctan t^2\,dt - \frac{\pi}{2}\int_0^x 1\,dt \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left(\arctan t^2 - \frac{\pi}{2}\right) dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} - \int_0^x \arctan\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} \arctan\frac{1}{t^2}\,dt = \boxed{\text{VALORE FINITO}}$$

PERCHÈ IL CARATTERE DI $\int_0^{+\infty} \arctan\frac{1}{t^2}\,dt$ È UGUALE A QUELLO DI $\int_1^{+\infty} \arctan\frac{1}{t^2}\,dt$ CHE CONVERGE PER CONFRONTO ASINTOTICO CON $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$

c DETTA $g(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{PER } x>0\\ 0 & \text{PER } x=0\end{cases}$, SI HA $f_n \to g$ SOLO PUNTUALMENTE SU $[0,+\infty)$ E $(0,+\infty)$, MENTRE SU $[1,+\infty)$ LA CONVERGENZA È ANCHE UNIFORME.

INFATTI, PER OGNI $x\in[0,+\infty)$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\arctan n^2x^2=\begin{cases}0 & \text{SE } x=0\\ \frac{\pi}{2} & \text{SE } x>0\end{cases}$$

ORA, ESSENDO $g(x)$ DISCONTINUA IN 0, MENTRE TUTTE LE f_n SONO CONTINUE, LA CONVERGENZA IN $[0,+\infty)$ NON PUÒ ESSERE UNIFORME.

MA NEMMENO IN $(0,+\infty)$ PUÒ ESSERE UNIFORME PERCHÉ, ESSENDO $g(0)=f_n(0)=0$, SI HA:

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|g(x)-f_n(x)|=\sup_{x\in[0,+\infty)}|g(x)-f_n(x)|$$

QUINDI $d(f_n,g)$ HA LO STESSO VALORE SU $(0,+\infty)$ E SU $[0,+\infty)$, E SAPPIAMO GIÀ CHE SU $[0,+\infty)$, $d(f_n,g)\not\to 0$.

INVECE SU $[1,+\infty)$ LA CONVERGENZA È UNIFORME PERCHÉ:

$$d(f_n,g)=\sup_{x\in[1,+\infty)}\left|\arctan(nx)^2-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}-\arctan n^2 \to 0 \quad \text{PER } n\to+\infty$$

PERCHÉ $\arctan t$ È CRESCENTE

d DETTA $F(x)=\frac{\pi}{2}x$ SI HA $F_n\to F$ UNIFORMEMENTE SU $[0,+\infty)$

INFATTI $\forall x\in[0,+\infty)$ E $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ SI HA:

$$F(x)-F_n(x)=\frac{\pi}{2}x-\int_0^x \arctan(nt)^2\,dt=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^x 1\,dt-\int_0^x\arctan(nt)^2\,dt=$$

$t=\varphi(u)=\frac{u}{n}$

$$=\int_0^x \frac{\pi}{2}-\arctan(nt)^2\,dt=\int_0^x \arctan\frac{1}{(nt)^2}\,dt=\frac{1}{n}\int_0^{nx}\arctan\frac{1}{u^2}\,du<$$

$$<\boxed{\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\arctan\frac{1}{u^2}\,du}$$

QUANTITÀ FINITA PERCHÉ SAPPIAMO GIÀ CHE L'INTEGRALE CONVERGE

QUINDI, SU $[0,+\infty)$ SI HA:

$$d(F_n,F)=\sup_{x\in[0,+\infty)}|F(x)-F_n(x)|<\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\arctan\frac{1}{u^2}\,du \to 0 \quad \text{PER } n\to+\infty$$

2 STUDIARE, AL VARIARE DI $\alpha > 0$, CONVERGENZA SEMPLICE E ASSOLUTA DI

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$$

SVOLGIMENTO

PER $\alpha > 2$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

PER $\frac{2}{3} < \alpha \leq 2$ CONVERGE SEMPLICEMENTE MA NON ASSOLUTAMENTE

PER $0 < \alpha \leq \frac{2}{3}$ DIVERGE A $-\infty$.

INFATTI, DETTO a_n IL TERMINE n-ESIMO DELLA SERIE, SI HA:

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \simeq \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{PER } n \to +\infty$$

QUINDI $\sum |a_n|$ E $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ HANNO LO STESSO CARATTERE E PERCIÒ

$\sum |a_n|$ CONVERGE SE E SOLO SE $\alpha > 2$.

PER LA CONVERGENZA SEMPLICE NON POSSO APPLICARE LEIBNIZ VISTO CHE SE $\alpha < 1$ $\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}$ NON È MONOTONO.

TUTTAVIA POSSO USARE LEIBNIZ PER STABILIRE CHE:

$$\sum b_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + 1}} \quad \text{CONVERGE.}$$

SICCOME $\sum b_n$ CONVERGE, IL CARATTERE DI $\sum a_n$ E $\sum (a_n - b_n)$ È LO STESSO.

NOTIAMO CHE:

$$a_n - b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + 1}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n} \cdot \sqrt{n^\alpha + 1}} =$$

$$= (-1)^n \frac{\cancel{n^\alpha} + 1 - \cancel{n^\alpha} - (-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n} \cdot \sqrt{n^\alpha + 1} \cdot \left(\sqrt{n^\alpha + 1} + \sqrt{n^\alpha + (-1)^n} \right)}$$

CHE PER n PARI È NULLO, MENTRE PER n DISPARI SI HA:

$$a_n - b_n = a_{2k+1} - b_{2k+1} \simeq - \frac{1}{(2k+1)^{\frac{3}{2}\alpha}}$$

LA CUI SERIE CONVERGE SE $\frac{3}{2}\alpha > 1$, CIOÈ $\alpha > \frac{2}{3}$, ALTRIMENTI DIVERGE A $-\infty$.

$\boxed{3}$ DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = f\left(\dfrac{e^y - 2}{e^y}\right) \cdot e^x \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$\boxed{a}$ TROVARNE LA SOLUZIONE NEL CASO CHE f SIA LA FUNZIONE IDENTITÀ, CIOÈ $f(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\boxed{b}$ NEL CASO $f(t) = \sin t$, DIRE SE LA SOL. È PROLUNGABILE FINO A $-\infty$ E, IN CASO AFFERMATIVO, DIRE SE $y = \ln 2$ È ASINTOTO ORIZZONTALE OPPURE NO.

SVOLGIMENTO

$\boxed{a}$ SIA $y(x)$ LA SOL. DI:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^y - 2}{e^y} \cdot e^x \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

SICCOME, PER IL T. DI UNICITÀ, $y(x)$ NON PUÒ INTERSECARE LA SOL. COSTANTE $y \equiv \ln 2$, POSSO SCRIVERE CHE $y(x)$ SODDISFA:

$$\frac{e^{y(x)}}{e^{y(x)} - 2} \cdot y'(x) = e^x$$

CIOÈ:

$$\left(\ln\left(e^{y(x)} - 2\right)\right)' = \left(e^x\right)'$$

CIOÈ:

$$\ln\left(e^{y(x)} - 2\right) = e^x + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

DA CUI:

(1) $$e^{y(x)} = 2 + k e^{e^x} \qquad (k = e^c > 0)$$

DA $y(0) = 3$ E (1) SEGUE:

$$e^3 = 2 + k \cdot e$$

CIOÈ:

$$k = \frac{e^3 - 2}{e}$$

QUINDI LA (1) DIVENTA:

$$e^{y(x)} = 2 + \left(\frac{e^3-2}{e}\right) e^{e^x}$$

CIOÈ:

$$y(x) = \ln\left(2 + (e^3-2)\, e^{e^x - 1}\right)$$

$\boxed{b}$ SIA $y(x)$ LA SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} y' = \sin\left(\dfrac{e^y - 2}{e^y}\right) e^x \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{OSS. 1}}$ FINCHÈ ESISTE, $y(x) > \ln 2$ E $0 < y'(x) < e^x$. IN PARTICOLARE $y(x)$ È STRETT. CRESCENTE

INFATTI FINCHÈ $y(x)$ ESISTE NON PUÒ INTERSECARE LA SOL. COSTANTE $y = \ln 2$, QUINDI RIMANE NEL SEMIPIANO $\{(x,y) \mid y > \ln 2\}$. INOLTRE SE $y > \ln 2$ SI HA

$$\frac{e^y - 2}{e^y} = 1 - \frac{2}{e^y} > 1 - \frac{2}{e^{\ln 2}} > 0$$

ED ANCHE

$$\frac{e^y - 2}{e^y} = 1 - \frac{2}{e^y} < 1$$

QUINDI:

$$0 = (\sin 0) \cdot e^x < \sin\left(\frac{e^y - 2}{e^y}\right) \cdot e^x < \sin(1)\, e^x < e^x$$

DI CONSEGUENZA, FINCHÈ $y(x)$ ESISTE SI HA:

$$0 < y'(x) < e^x$$

IN PARTICOLARE $y(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE.

$\boxed{\text{OSS. 2}}$ SE (a,b) È L'INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA DI $y(x)$, ALLORA $a = -\infty$

SE FOSSE $a > -\infty$ ALLORA PONGO:

$$y_0 = \lim_{x \to a^+} y(x)$$

ESISTE FINITO ED È $\geq \ln 2$ GRAZIE AL FATTO CHE $y(x)$ È CRESCENTE E $y(x) > \ln 2$

SIA ORA $\delta>0$ E $v \in C^1(a-\delta, a+\delta)$ SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} y' = \sin\left(\frac{e^y-2}{e^y}\right) e^x \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

TALE v ESISTE PER IL T. DI ESISTENZA E UNICITÀ.

DEFINISCO $\tilde{y}(x)$ SU $(a-\delta, b)$ NEL MODO SEGUENTE:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{PER } x \in (a-\delta, a] \\ y(x) & \text{PER } x \in (a, b) \end{cases}$$

IL FATTO CHE $\tilde{y}(x)$ SODDISFI L'EQUAZIONE PER $x \neq a$, È OVVIO. RIMANE DA VERIFICARE CHE È REGOLARE ANCHE PER $x=a$ E CHE IN TALE PUNTO SODDISFA L'EQUAZIONE.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE:

$$\lim_{x\to a^-} \tilde{y}(x) = \lim_{x\to a^-} v(x) = v(a) = y_0 = \lim_{x\to a^+} y(x) = \lim_{x\to a^+} \tilde{y}(x)$$

QUINDI $\tilde{y}(x)$ È CONTINUA ANCHE PER $x=a$. INOLTRE:

$$\lim_{x\to a^-} \tilde{y}'(x) = \lim_{x\to a^-} v'(x) = v'(a) = \frac{e^{v(a)}-2}{e^{v(a)}} e^a = \frac{e^{y_0}-2}{e^{y_0}} \cdot e^a$$

E

$$\lim_{x\to a^+} \tilde{y}'(x) = \lim_{x\to a^+} y'(x) = \lim_{x\to a^+} \frac{e^{y(x)}-2}{e^{y(x)}} e^x = \frac{e^{y_0}-2}{e^{y_0}} \cdot e^a$$

QUINDI:

$$\tilde{y}'(a) = \frac{e^{y_0}-2}{e^{y_0}} e^a = \frac{e^{\tilde{y}(a)}-2}{e^{\tilde{y}(a)}} \cdot e^a .$$

CIOÈ $\tilde{y}(x)$ È DERIVABILE ANCHE PER $x=a$ E SODDISFA L'EQUAZIONE.

CIÒ SIGNIFICA CHE $\tilde{y}(x)$ PROLUNGA $y(x)$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE (a,b) SIA INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE.

QUINDI DEVE ESSERE $b = -\infty$.

OSS. 3 PER $x \to -\infty$ $y(x)$ HA ASINTOTO ORIZZONTALE $y = b$ CON $b \geq 2 > \ln 2$.

INTANTO L'ASINTOTO ORIZZONTALE C'È SICURAMENTE PERCHÈ $y(x)$ È MONOTONA

È LIMITATA. INOLTRE, SICCOME $0 < y'(x) < e^x$, PER $x<0$ SI HA

$$y(0) - y(x) = \int_x^0 y'(t)\,dt \leq \int_x^0 e^t\,dt = e^0 - e^x = 1 - e^x$$

CIOÈ:

$$y(0) - y(x) \leq 1 - e^x \qquad \forall x < 0$$

CIOÈ

$$y(x) \geq y(0) - 1 + e^x = 2 + e^x \qquad \forall x < 0$$

QUINDI

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) \geq \lim_{x \to -\infty} 2 + e^x = 2$$

---

4 DATA $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha + \sin y^2}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|xy|}} & \text{PER } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{PER } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ IN $(0,0)$ AL VARIARE DI $\alpha > 0$.

b PER $\alpha = 2$ CALCOLARE $f_x(x,y)$ IN OGNI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ IN CUI ESISTE

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

a f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ SE E SOLO SE $\alpha > \frac{3}{2}$

INFATTI SE $0 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ f NON È NEMMENO DERIVABILE RISPETTO A x, IN $(0,0)$, PERCHÈ:

$$f(x,0) = \begin{cases} |x|^{\alpha - \frac{1}{2}} & \text{SE } x \neq 0 \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

CHE PER $x = 0$ HA UNA CUSPIDE SE $\alpha < \frac{3}{2}$ E UN PUNTO ANGOLOSO SE $\alpha = \frac{3}{2}$.

CIÒ SIGNIFICA CHE SE $\alpha \leq \frac{3}{2}$ $f_x(0,0)$ NON ESISTE E QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, f NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

SE INVECE $\alpha > \frac{3}{2}$ SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0\cdot x - 0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha + \sin y^2}{\left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} + \sqrt{|xy|}\right)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

PERCHÉ $\sqrt{|xy|} = o\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\alpha} + \sin y^2}{\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} =$$

PERCHÉ $\alpha > \frac{3}{2}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\overbrace{\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}}^{\text{LIMITATO}} \cdot \overbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{\text{LIMITATO}} \cdot \overbrace{|x|^{\alpha-\frac{3}{2}}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{\sin y^2}{\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)\sqrt{x^2+y^2}}}^{\to 0} \right) = 0$$

PERCHÉ SE $x^2+y^2 \le 1$ ALLORA $0 \le \sin y^2 \le y^2$ E QUINDI:

$$0 \le \frac{\sin y^2}{\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{y^2}{\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)\sqrt{x^2+y^2}} = \overbrace{\frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}}^{\text{LIMITATO}} \cdot \overbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{\text{LIMITATO}} \cdot \overbrace{\sqrt{|y|}}^{0} \to 0$$

QUINDI PER $\alpha > \frac{3}{2}$ f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ E $\nabla f(0,0) = (0,0)$

b OSSERVIAMO CHE, PER $\alpha = 2$, SE $x \neq 0$ SI HA:

$$f_x(x,y) = \left(\frac{|x|^2 + \sin y^2}{\sqrt{|x|}\left(1+\sqrt{|y|}\right)+\sqrt{|y|}} \right)_x = \frac{2|x|\cdot\left(\sqrt{|x|}\cdot\left(1+\sqrt{|y|}\right)+\sqrt{|y|}\right) - \left(|x|^2+\sin y^2\right)\frac{1+\sqrt{|y|}}{2\sqrt{|x|}}}{\left(\sqrt{|x|}\cdot\left(1+\sqrt{|y|}\right)+\sqrt{|y|}\right)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x) =$$

$$= \boxed{\frac{\frac{3}{2}|x|\cdot\sqrt{|x|}\left(1+\sqrt{|y|}\right) + 2|x|\sqrt{|y|} - \frac{1}{2\sqrt{|x|}}\cdot\sin y^2\cdot\left(1+\sqrt{|y|}\right)}{\left(\sqrt{|x|}\cdot\left(1+\sqrt{|y|}\right)+\sqrt{|y|}\right)^2} \cdot \operatorname{sgn}(x)}$$

INVECE PER I PUNTI DEL TIPO $(0,y)$ SAPPIAMO GIÀ CHE $f_x(0,0)=0$, SE INVECE $y \neq 0$,

OSSERVIAMO CHE:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f_x(x,y) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \boxed{} = \begin{cases} = 0 & \text{SE } \sin y^2 = 0 \\ = \mp\infty & \text{SE } \sin y^2 > 0 \\ = \pm\infty & \text{SE } \sin y^2 < 0 \end{cases}$$

QUINDI:

$$f_x(0,y) = \begin{cases} = 0 & \text{SE } y = \pm\sqrt{k\pi} \text{ CON } k \in \mathbb{N} \\ \text{NON ESISTE} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$