Analisi Matematica 2 - A.A. 20/21 - Callegari

# I Esonero

26 Aprile 2021

**Problema 1** TROVARE TUTTI GLI $z \in \mathbb{C}$ TALI CHE $\left(z^2 + 2\bar{z} + 1\right) \cdot \left(3 + \frac{z^4}{|\bar{z}|^4 - 1}\right) = 0$

**Problema 2** AL VARIARE DI $\alpha > 0$ SIA $f_\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ LA FUNZIONE DEFINITA DA:

$$f_\alpha(x) = \frac{3}{\left(x^{4\alpha} + \sqrt{x}\right) \cdot x^\alpha}$$

**a** PER $\alpha = \frac{1}{2}$ CALCOLARE $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$.

**b** STUDIARE LA CONVERGENZA DI $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$ AL VARIARE DI $\alpha > 0$.

**Problema 3** AL VARIARE DI $\alpha \in [0, 2\pi]$ CONSIDERI L'INTEGRALE IMPROPRIO:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \sin(x - \alpha)}{\sqrt{x}}\, dx$$

STUDIARNE LA CONVERGENZA AL VARIARE DI $\alpha$.

**Problema 4** STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \sin(n^2)}$

**Problema 5** DIRE PER QUALI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} x^n$ CONVERGE.

**Problema 6** SIA $(a_n)$ UNA SUCCESSIONE IN $\mathbb{R}$. DIMOSTRARE O CONFUTARE CON UN CONTROESEMPIO, CIASCUNA DELLE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

**a** $\sum |a_n|$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n^2$ CONVERGE

**b** $\sum |a_n|$ CONVERGE $\Rightarrow \sum \sqrt{|a_n \cdot a_{n+1}|}$ CONVERGE

**c** $\sum \sqrt{|a_n \cdot a_{n+1}|}$ CONVERGE $\Rightarrow \sum |a_n|$ CONVERGE

**d** $\sum a_n$ E $\sum a_n^5$ CONVERGONO $\Rightarrow \sum a_n^3$ CONVERGE (FACOLTATIVO)

# Soluzioni

## Problema 1

DOBBIAMO TROVARE LE SOLUZIONI DELLE DUE EQUAZIONI:

$$(1)\quad z^2+2\bar{z}+1=0 \qquad\qquad (2)\quad 3+\frac{z^4}{|z|^4-1}=0$$

PER (1) SI PONE $z=x+iy$ E SI OTTIENE:

$$(x+iy)^2+2(x-iy)+1=0$$

CIOÈ:

$$(x^2-y^2+2x+1)+i(2xy-2y)=0$$

CIOÈ:

$$\begin{cases} x^2-y^2+2x+1=0 \\ 2xy-2y=0 \end{cases}$$

CIOÈ:

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2-y^2+2x+1=0 \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} x=1 \\ x^2-y^2+2x+1=0 \end{cases}$$

DA CUI SEGUE

$$\begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

QUINDI (1) HA TRE SOLUZIONI: $z=-1$ E $z=1\pm 2i$, MA $z=-1$ VA SCARTATA PERCHÈ NON STA NEL DOMINIO DI (2). QUINDI SI TENGONO SOLO $z=1\pm 2i$.

PER (2) INVECE SI OSSERVI CHE, POSTO $w=z^4$, SI HA CHE $w$ È REALE E RISOLVE:

$$3+\frac{w}{|w|-1}=0$$

CIOÈ:

$$w=3-3|w|$$

DA CUI SEGUE $w=\frac{3}{4}$ O $w=-\frac{3}{2}$.

BASTA QUINDI RISOLVERE LE DUE EQUAZIONI $z^4=\frac{3}{4}$ E $z^4=-\frac{3}{2}$. SI HA:

$$z^4 = \frac{3}{4} \iff z \in \left\{ \sqrt[4]{\frac{3}{4}}, -\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, i\sqrt[4]{\frac{3}{4}}, -i\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \right\}$$

$$z^4 = -\frac{3}{2} \iff z = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{k\frac{\pi}{2}i} \quad \text{CON } k=0,1,2,3$$

QUINDI LA **(2)** HA 8 SOLUZIONI.

## Problema 2

**a** SI HA:

$$\int_1^{+\infty} f_{\frac{1}{2}}(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2\sqrt{x}+x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \frac{3}{x^2\sqrt{x}+x}\,dx \overset{x=t^2}{=}$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_1^{\sqrt{c}} \frac{3}{t^5+t^2}\cdot 2t\,dt = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{\sqrt{c}} \frac{6t^2}{t^3(t^3+1)}\,dt =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_1^{\sqrt{c}} \frac{2}{t^3(t^3+1)}\cdot (t^3)'\,dt \overset{u=t^3}{=} \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c\sqrt{c}} \frac{2}{u(u+1)}\,du =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} 2\int_1^{c\sqrt{c}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \lim_{c\to+\infty} 2\left[\ln\left(\frac{u}{u+1}\right)\right]_1^{c\sqrt{c}} =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left(2\ln\left(\frac{c\sqrt{c}}{1+c\sqrt{c}}\right) - 2\ln\frac{1}{2}\right) = \ln 4$$

**b** PRESO

**(3)**
$$\int_0^{+\infty} \frac{3}{x^{5\alpha}+x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dx$$

DISTINGUIAMO I CASI A SECONDA DEI VALORI CRITICI DEGLI ESPONENTI $5\alpha$ E $\alpha+\frac{1}{2}$, CHE SONO $\alpha=\frac{1}{5}$ E $\alpha=\frac{1}{2}$.

AVREMO QUINDI 5 CASI: $0<\alpha<\frac{1}{5}$, $\alpha=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}<\alpha<\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha>\frac{1}{2}$

IN CIASCUNO DEI QUALI DIRE CHE **(3)** CONVERGE SIGNIFICA DIRE CHE CONVERGONO ENTRAMBI GLI INTEGRALI:

$$(4) \quad \int_0^1 \frac{3}{x^{5\alpha} + x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dx \qquad (5) \quad \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^{5\alpha} + x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,dx$$

NOTIAMO CHE, PER $0 < \alpha < \frac{1}{5}$ E $\alpha = \frac{1}{5}$, $5\alpha$ E $\alpha + \frac{1}{2}$ SONO ENTRAMBI $\leq 1$,

QUINDI **(5)** DIVERGE E PERCIÒ **(3)** NON PUÒ CONVERGERE.

ANALOGAMENTE, PER $\alpha = \frac{1}{2}$ E $\alpha > \frac{1}{2}$, $5\alpha$ E $\alpha + \frac{1}{2}$ SONO ENTRAMBI $\geq 1$,

QUINDI **(4)** DIVERGE E PERCIÒ **(3)** NON CONVERGE.

INVECE PER $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$ SI HA $5\alpha > 1$, QUINDI **(5)** CONVERGE, E $\alpha + \frac{1}{2} < 1$,

QUINDI CONVERGE ANCHE **(4)**.

SI PUÒ QUINDI CONCLUDERE CHE **(3)** CONVERGE SE E SOLO SE $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$.

## Problema 3

L'INTEGRALE NON È IMPROPRIO PER $x = 0$ MA SOLO PER $x \to +\infty$ QUINDI IL CARATTERE NON CAMBIA PRENDENDO COME PRIMO ESTREMO $2\pi$ INVECE DI $0$.

LA FUNZIONE:

$$f_\alpha(x) = \sin x \cdot \sin(x - \alpha) = \sin^2 x \cdot \cos\alpha - \sin x \cos x \sin\alpha$$

È PERIODICA CON PERIODO $2\pi$ E IL SUO INTEGRALE SUL PERIODO È:

$$\int_0^{2\pi} f_\alpha(x)\,dx = \cos\alpha \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\,dx - \sin\alpha \cdot \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\,dx = \pi\cos\alpha$$

QUINDI, PER $\alpha = \frac{\pi}{2}$ E $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, $f_\alpha(x)$ È PERIODICA A MEDIA NULLA, PERCIÒ L'INTEGRALE RICHIESTO CONVERGE PER IL CRITERIO DEGLI INTEGRALI OSCILLANTI.

SE INVECE $\alpha \in [0, 2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$ SI HA:

$$(6) \quad \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{f_\alpha(x) - \frac{1}{2}\cos\alpha}{\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}\cos\alpha}{\sqrt{x}}\,dx$$

MA $f_\alpha(x) - \frac{1}{2}\cos\alpha$ È PERIODICA A MEDIA NULLA, QUINDI PER IL CRIT. DEGLI INTEGRALI OSCILLANTI, $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{f_\alpha(x) - \frac{1}{2}\cos\alpha}{\sqrt{x}}\,dx$ CONVERGE, QUINDI **(6)** HA LO STESSO CARATTERE DI $\frac{1}{2}\cos\alpha \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, CHE DIVERGE.

RIASSUMENDO: IL NOSTRO INTEGRALE CONVERGE PER $\alpha = \frac{\pi}{2}$ E $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, DIVERGE PER $\alpha \in [0, 2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$.

## Problema 4

LA NOSTRA SERIE È $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$, CON $a_n = 2n + \sin(n^2)$.

È IMMEDIATO CHE $a_n \to +\infty$ PER $n \to +\infty$. INOLTRE $(a_n)$ È CRESCENTE PERCHÉ:

$$a_{n+1} - a_n = 2n+2+\sin((n+1)^2) - 2n - \sin(n^2) = 2 + \sin((n+1)^2) - \sin n^2 > 0$$

QUINDI $\frac{1}{a_n} \to 0$ DECRESCENDO, QUINDI $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$ CONVERGE PER IL CR. DI LEIBNIZ.

## Problema 5

SI HA:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$$

QUINDI IL RAGGIO DI CONVERGENZA È $r = \frac{1}{e}$.

QUINDI LA SERIE CONVERGE SE $|x| < \frac{1}{e}$ E NON CONVERGE SE $|x| > \frac{1}{e}$.

RIMANE DA STUDIARE COSA SUCCEDE PER $x = \frac{1}{e}$ E $x = -\frac{1}{e}$.

PER $x = \frac{1}{e}$ LA SERIE DIVENTA $\sum a_n$ DOVE

**(7)** $$a_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} \cdot e^{-n} = \frac{1}{n} e^{n^3 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - n}$$

MA SI HA:

**(8)** $$n^3 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - n = n^3\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) - n = -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \to 0$$

DA CUI SEGUE $a_n \simeq \frac{1}{n}$ E QUINDI $\sum a_n$ DIVERGE.

INVECE, PER $x = -\frac{1}{e}$ LA SERIE DIVENTA $\sum (-1)^n a_n$, CON $a_n$ SEMPRE DATO DA **(7)**.

TENENDO CONTO DI **(8)** SI OTTIENE:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

QUINDI:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

CHE CONVERGE PERCHÉ: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CONVERGE PER LEIBNIZ E $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE.

# Problema 6

**a** L'AFFERMAZIONE È VERA. INFATTI:

$$\left(\sum|a_n| \text{ CONVERGE}\right) \Rightarrow \left(|a_n|\to 0\right) \Rightarrow \left(\text{DEFINITIVAMENTE IN } n \quad 0 \leq |a_n| \leq 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\text{DEFINITIVAMENTE IN } n \quad 0 \leq a_n^2 \leq |a_n|\right) \Rightarrow \left(\sum a_n^2 \text{ CONVERGE PER IL CR. DEL CONFRONTO}\right)$$

**b** L'AFFERMAZIONE È VERA. BASTA OSSERVARE CHE:

$$0 \leq \sqrt{|a_n \cdot a_{n+1}|} = \sqrt{|a_n|}\cdot\sqrt{|a_{n+1}|} \leq \frac{\left(\sqrt{|a_n|}\right)^2 + \left(\sqrt{|a_{n+1}|}\right)^2}{2} = \frac{|a_n|+|a_{n+1}|}{2}$$

E APPLICARE IL CR. DEL CONFRONTO.

**c** L'AFFERMAZIONE È FALSA. COME CONTROESEMPIO BASTA PRENDERE

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{SE } n \text{ È PARI} \\ \frac{1}{n^4} & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \end{cases}$$

IN TAL CASO, INFATTI $\sum|a_n|$ NON PUÒ CONVERGERE PERCHÈ $a_n \not\to 0$.

INVECE $\sum\sqrt{|a_n \cdot a_{n+1}|}$ CONVERGE PERCHÈ $\sqrt{|a_n \cdot a_{n+1}|} \approx \frac{1}{n^2}$ VISTO CHE:

$$\sqrt{|a_n \cdot a_{n+1}|} = \begin{cases} = \sqrt{1\cdot\frac{1}{(n+1)^4}} = \frac{1}{(n+1)^2} \approx \frac{1}{n^2} & \text{SE } n \text{ È PARI} \\ = \sqrt{\frac{1}{n^4}\cdot 1} = \frac{1}{n^2} & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \end{cases}$$

**d** L'AFFERMAZIONE È FALSA. COME CONTROESEMPIO PRENDIAMO:

(9)
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} & \text{PER } n = k^2 \quad \text{CON } k \in \mathbb{N}-\{0\} \\ \frac{-1}{2k\sqrt[3]{k}} & \text{PER } k^2 < n \leq (k+1)^2 - 1 \quad \text{CON } k \in \mathbb{N}-\{0\} \end{cases}$$

MOSTRIAMO CHE $\sum a_n$ CONVERGE.

POSTO $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, GRAZIE A **(9)**, PER OGNI $k \in \mathbb{N}-\{0\}$, SI HA:

(10)
$$S_{k^2} > S_{k^2+1} > S_{k^2+2} > \dots > S_{k^2+2k} \quad \text{MA} \quad S_{k^2+2k} < S_{(k+1)^2}$$

QUINDI PER MOSTRARE CHE $S_n \to 0$ BASTA MOSTRARE CHE

**(11)** $S_{k^2} \to 0$ E **(12)** $S_{k^2+2k} \to 0$

MA SICCOME

$$a_{k^2}+a_{k^2+1}+\cdots+a_{k^2+2k}=\frac{1}{\sqrt[3]{k}}+\underbrace{\frac{-1}{2k\sqrt[3]{k}}+\cdots+\frac{-1}{2k\sqrt[3]{k}}}_{2k}=\frac{1}{\sqrt[3]{k}}+2k\cdot\frac{-1}{2k\sqrt[3]{k}}=0$$

SI HA

$$S_{k^2+2k}=0 \quad \text{E} \quad S_{k^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \quad \text{PER OGNI } k\in\mathbb{N}-\{0\}$$

DA CUI SEGUE **(11)** E **(12)**.

MOSTRIAMO CHE $\sum a_n^3$ DIVERGE.

POSTO $\mathcal{S}_n=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$, DA **(9)** SEGUE CHE, $\forall k\in\mathbb{N}-\{0\}$ SI HA:

$$\mathcal{S}_{k^2}>\mathcal{S}_{k^2+1}>\mathcal{S}_{k^2+2}>\cdots>\mathcal{S}_{k^2+2k} \quad \text{MA} \quad \mathcal{S}_{k^2+2k}<\mathcal{S}_{(k+1)^2}$$

DI CONSEGUENZA, PER MOSTRARE CHE $\mathcal{S}_n\to+\infty$ BASTA MOSTRARE CHE $\mathcal{S}_{k^2+2k}\to+\infty$

A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE

$$a^3_{k^2}+a^3_{k^2+1}+\cdots+a^3_{k^2+2k}=\frac{1}{k}+\underbrace{\frac{-1}{8k^4}+\cdots+\frac{-1}{8k^4}}_{2k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{4k^3}$$

QUINDI

$$\mathcal{S}_{k^2+2k}=\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{4m^3}\right)$$

DA CUI SEGUE CHE $\mathcal{S}_{k^2+2k}\to+\infty$ PERCHÉ $\sum\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{4m^3}\right)$

DIVERGE A $+\infty$.

MOSTRIAMO INFINE CHE $\sum a_n^5$ CONVERGE

POSTO $\sigma_n=a_1^5+a_2^5+\cdots+a_n^5$ SI OSSERVA CHE

$$a^5_{k^2}+a^5_{k^2+1}+\cdots+a^5_{k^2+2k}=\frac{1}{\sqrt[3]{k^5}}+2k\cdot\frac{-1}{32k^5\cdot\sqrt[3]{k^5}}=\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2}}-\frac{1}{16k^5\sqrt[3]{k^2}}$$

DA CUI SEGUE CHE

$$\sigma_{k^2+2k}=\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{1}{m\sqrt[3]{m^2}}-\frac{1}{16m^5\sqrt[3]{m^2}}\right)\longrightarrow \ell\in\mathbb{R} \quad \text{PER} \quad k\to+\infty$$

DA CUI, RAGIONANDO COME PER $\sum a_n$, SI DEDUCE CHE $\sigma_n\to\ell$ PER $n\to+\infty$