# PROBLEMI AGGIUNTIVI PER EXE 1

**P.1** USANDO SOLO LA DEFINIZIONE CALCOLARE

a) $\int_0^3 \chi_{[1,2]}(x)\,dx$ b) $\int_0^3 \chi_{(1,2)}(x)\,dx$ c) $\int_{-1}^1 \sin x\,dx$

**P.2** SIA $f \in \mathcal{R}([-1,1])$, SIA $A \subset [-1,1]$ UN INSIEME FINITO E SIA $g:[-1,1] \to \mathbb{R}$ TALE CHE $g(x) = f(x)$ $\forall x \in [-1,1] - A$. MOSTRARE CHE ANCHE $g \in \mathcal{R}([-1,1])$.

**P.3** SIA $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]} & \text{SE } x \in (0,1] \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

MOSTRARE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$

**P.4** DATA $f \in \mathcal{R}([0,2])$ DEFINIAMO $g(x) = f(2x)$. MOSTRARE CHE $g \in \mathcal{R}([0,1])$.

**P.5** DATE $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È VERO CHE IL LORO PRODOTTO $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.

# SOLUZIONI

**P.1** $\boxed{a}$ SIA $P=\{0,1,2,3\}$. POSTO $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$ SI HA:

$$s(f,P)=(1-0)\cdot 0+(2-1)\cdot 1+(3-2)\cdot 0=1$$

$$S(f,P)=(1-0)\cdot 0+(2-1)\cdot 1+(3-2)\cdot 0=1$$

DA CUI SEGUE:

$$1=s(f,P)\leq\int^- f\leq\int^+ f\leq S(f,P)=1$$

QUINDI SONO TUTTE UGUAGLIANZE, QUINDI $\int_0^3 f(x)\,dx=1$

$\boxed{b}$ STAVOLTA $f(x)=\chi_{(1,2)}(x)$ E QUINDI $f(2)=0$.

DI CONSEGUENZA I CALCOLI DEL PUNTO $\boxed{a}$ FUNZIONANO SOLO PER MOSTRARE CHE $S(f,P)=1$, E QUINDI $\int^+ f\leq 1$.
PER $\int^- f$ FACCIAMO IN ALTRO MODO.
$\forall\varepsilon\in(0,1)$ PRENDIAMO $P_\varepsilon=\{0,1+\varepsilon,2,3\}$ E SI HA:

$$s(f,P_\varepsilon)=(1+\varepsilon-0)\cdot 0+(2-(1+\varepsilon))\cdot 1+(3-2)\cdot 0=1-\varepsilon$$

DI CONSEGUENZA, $\forall\varepsilon\in(0,1)$ SI HA

$$\int^- f\geq s(f,P_\varepsilon)=1-\varepsilon$$

VISTA L'ARBITRARIETÀ DI $\varepsilon$, DA CIÒ SEGUE CHE $\int^- f\geq 1$, DOPODICHÉ SI CONCLUDE COME NEL PUNTO $\boxed{a}$

$\boxed{C}$ STAVOLTA $f(x) = \sin x$ SU $[-1,1]$ È CRESCENTE E DISPARI.

POSTO:

$$P_n = \left\{-1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

SI HA:

$$s(f,P_n) = \sum_{i=-n+1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \inf\left\{f(x) \;\middle|\; \frac{i-1}{n} \leq x < \frac{i}{n}\right\} =$$

GRAZIE AL FATTO CHE $f$ È CRESCENTE

$$= \sum_{i=-n+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \overbrace{f\left(\frac{i-1}{n}\right)} =$$

$f$ DISPARI

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(f(-1) + \cancel{f\left(-\frac{n-1}{n}\right)} + \dots + \cancel{f\left(-\frac{1}{n}\right)} + \underbrace{f(0)}_{=0} + \cancel{f\left(\frac{1}{n}\right)} + \dots + \cancel{f\left(\frac{n-1}{n}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot f(-1) = -\frac{\sin 1}{n}$$

QUINDI:

$$\int^{-} f = \sup\{s(f,P) \mid P \text{ PART. DI } [-1,1]\} \geq$$

$$\geq \sup\{s(f,P_n) \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\} =$$

$$= \sup\left\{-\frac{\sin 1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\} = 0$$

CIOÈ: $\int^{-} f \geq 0$.

ANALOGAMENTE SI TROVA: $\int^{+} f \leq 0$.

QUINDI:

$$0 \leq \int^{-} f \leq \int^{+} f \leq 0$$

DA CUI SEGUE: $\int^{+} f = \int^{-} f = 0 = \int_{-1}^{1} \sin x \, dx$.

**P.2** BASTA DIMOSTRARE L'AFFERMAZIONE NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $A=\{\bar{x}\}$; IL CASO GENERALE IN CUI $A$ CONTIENE $K$ PUNTI SEGUE APPLICANDO $K$ VOLTE IL CASO PARTICOLARE.

SIA DUNQUE $A=\{\bar{x}\}$ E SIA $M>0$ DEFINITA DA:

$$M = \max\left\{ \sup\left\{ |f(x)| \;\middle|\; -1 \le x \le 1 \right\}, |g(\bar{x})| \right\}$$

$\forall \varepsilon > 0$ SIA $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ PART. DI $[-1,1]$ TALE CHE

ESISTE PERCHÈ $f \in \mathcal{R}([-1,1])$

$$(\times) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{2}$$

SIA $K$ TALE CHE $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k)$. PASSANDO EVENTUALMENTE AD UNA PARTIZIONE PIÙ FINE POSSIAMO SEMPRE SUPPORRE CHE:

$$(\bullet) \qquad x_k - x_{k-1} < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

RICORDANDO CHE PER $x \neq \bar{x}$ SI HA $g(x) = f(x)$, E USANDO PER $g$ LA STESSA PARTIZIONE $P$, SI OTTIENE:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) =$$

$$= \boxed{(x_k - x_{k-1})}\,\boxed{\operatorname{osc}(g, [x_{k-1}, x_k])} + \boxed{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i])} <$$

GRAZIE A $(\bullet)$

PERCHÈ $|g| \le M$

GRAZIE A $(\times)$

$$< \boxed{\frac{\varepsilon}{4M}} \cdot \boxed{2M} + \boxed{\frac{\varepsilon}{2}} = \varepsilon$$

ABBIAMO QUINDI MOSTRATO CHE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P$ PARTIZIONE DI $[-1,1]$ TALE CHE

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

QUINDI $g \in \mathcal{R}([-1,1])$.

$\boxed{P.3}$ PROCEDENDO COME NELLO SVOLGIMENTO DEL $\boxed{P.2\,(c)}$ DELLA LISTA $\boxed{EXE1-19/20}$ SI DIMOSTRA IL SEGUENTE:

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ E $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA. SE $g$ È CONTINUA SU TUTTO $[a,b]$ TRANNE AL PIÙ UN NUMERO FINITO DI PUNTI ALLORA $g \in \mathcal{R}([a,b])$.

PERÒ L'INSIEME DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DELLA NOSTRA $f$ È:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \cup \{0\}$$

CHE È INFINITO, E SI ACCUMULA IN $0$.
QUINDI NON SI PUÒ APPLICARE IL $\boxed{\text{TEOREMA}}$ SU TUTTO $[0,1]$.
TUTTAVIA, $\forall c \in (0,1)$ $[c,1] \cap A$ È FINITO, QUINDI SU $[c,1]$ SI PUÒ APPLICARE E CONCLUDERE CHE

$$\forall c \in (0,1) \quad f \in \mathcal{R}([c,1])$$

MOSTRIAMO ORA CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$.
PER OGNI $\varepsilon > 0$ PRENDIAMO $c = \frac{\varepsilon}{4}$ E $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[c,1]$ TALE CHE:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{2}$$

POSSIAMO FARLO PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([c,1])$

PRESA ORA $P' = \{0\} \cup P$, SI HA CHE $P'$ È UNA PARTIZIONE DI $[0,1]$ E INOLTRE:

$$(c-0) \cdot \operatorname{osc}(f, [0,c]) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) <$$

(•)

$$< \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

IL FATTO CHE $\forall \varepsilon > 0\ \exists P'$ PARTIZIONE DI $[0,1]$ TALE CHE VALGA $(\bullet)$, EQUIVALE A DIRE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

SI NOTI CHE LA NOSTRA ARGOMENTAZIONE PUÒ DIMOSTRARE, PIÙ IN GENERALE, IL SEGUENTE:

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ED $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA E TALE CHE $\forall c \in (a,b)\ f \in \mathcal{R}([c,b])$. ALLORA $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

$\boxed{\text{P.4}}$ SI NOTI CHE

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

È UNA PARTIZIONE DI $[0,2]$ SE E SOLO SE

$$P' = \left\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_1}{2}, \dots, \frac{x_n}{2}\right\}$$

È UNA PARTIZIONE DI $[0,1]$.

INOLTRE SI HA:

$$s(g,P') = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{2} - \frac{x_{i-1}}{2}\right) \inf\left\{g(x) \,\middle|\, \frac{x_{i-1}}{2} \leq x < \frac{x_i}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf\left\{f(2x) \,\middle|\, x_{i-1} \leq 2x < x_i\right\} = \frac{1}{2} s(f,P)$$

E, ANALOGAMENTE:

$$S(g,P') = \dots = \frac{1}{2} S(f,P)$$

SICCOME QUESTO VALE PER OGNI PARTIZIONE, ALLORA VALE ANCHE PER $\int^+$ E $\int^-$, QUINDI:

PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([0,2])$

$$\int^-_{[0,1]} g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int^-_{[0,2]} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int^+_{[0,2]} f(x)\,dx = \int^+_{[0,1]} g(x)\,dx \Rightarrow g \in \mathcal{R}([0,1])$$

**P.5** TRATTIAMO PRIMA IL CASO IN CUI $f, g > 0$.

SICCOME SONO LIMITATE PRENDIAMO $M > 0$ TALE CHE

$$\forall x \in [a,b] \quad 0 < f(x) < M \quad E \quad 0 < g(x) < M$$

PER OGNI $A \subset [a,b]$ VALGONO LE PROPRIETÀ:

1) $\sup\{f(x) \cdot g(x) \mid x \in A\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in A\} \cdot \sup\{g(x) \mid x \in A\}$

2) $\inf\{f(x) \cdot g(x) \mid x \in A\} \geq \inf\{f(x) \mid x \in A\} \cdot \inf\{g(x) \mid x \in A\}$

3) $\operatorname{osc}(f \cdot g, A) \leq M \operatorname{osc}(f, A) + M \operatorname{osc}(g, A)$

PER DIMOSTRARE (1) SI OSSERVI CHE $\forall x \in A$ SI HA:

$$f(x) \leq \sup\{f(x) \mid x \in A\} \quad E \quad g(x) \leq \sup\{g(x) \mid x \in A\}$$

DA CUI SEGUE (ESSENDO TUTTE QUANTITÀ NON NEGATIVE) CHE:

$$\forall x \in A \quad f(x) \cdot g(x) \leq \sup\{f(x) \mid x \in A\} \cdot \sup\{g(x) \mid x \in A\}$$

DA CUI SEGUE (1).

LA DIMOSTRAZIONE DI (2) È SIMILE.

DIMOSTRIAMO (3).

PER BREVITÀ, ANZICHÉ SCRIVERE $\sup\{F(x) \mid x \in A\}$ SCRIVEREMO $S_F$ E, ANALOGAMENTE $\inf\{F(x) \mid x \in A\}$ SI SCRIVERÀ $I_F$. SI HA:

$$\operatorname{osc}(f \cdot g, A) = S_{f \cdot g} - I_{f \cdot g} \leq$$

GRAZIE A (1) E A (2)

$$\leq S_f \cdot S_g - I_f \cdot I_g =$$

$$= S_f \cdot S_g - I_f \cdot S_g + I_f \cdot S_g - I_f \cdot I_g =$$

$$= S_g \cdot (S_f - I_f) + I_f \cdot (S_g - I_g) =$$

$$= S_g \cdot \operatorname{osc}(f, A) + I_f \cdot \operatorname{osc}(g, A) \leq M \cdot \operatorname{osc}(f, A) + M \operatorname{osc}(g, A)$$

ORA, $\forall \varepsilon > 0$ SIA $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ UNA PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE VALGANO SIMULTANEAMENTE LE CONDIZIONI:

$$(\blacktriangle) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

E

$$(\blacksquare) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

TALE $\mathcal{P}$ ESISTE SENZ'ALTRO PERCHÉ, ESSENDO $f \in \mathcal{R}([a,b])$, C'È $\mathcal{P}_1$ CHE SODDISFA ($\blacktriangle$) E, ESSENDO $g \in \mathcal{R}([a,b])$, C'È $\mathcal{P}_2$ CHE SODDISFA ($\blacksquare$), QUINDI BASTA PRENDERE $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

UTILIZZANDO TALE $\mathcal{P}$ PER $f \cdot g$, SI HA:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f \cdot g, [x_{i-1}, x_i]) \overset{(3)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \Big( M \cdot \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) + M \operatorname{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) \Big) =$$

$$= M \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) + M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \operatorname{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) \overset{(\blacktriangle) \text{ E } (\blacksquare)}{<}$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE, NEL CASO PARTICOLARE $f > 0$ E $g > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ T.C.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f \cdot g, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

QUINDI $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.

NEL CASO GENERALE ($f$ E $g$ DI SEGNO QUALSIASI) PRESO $M > 0$ T.C. $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| < M$ E $|g(x)| < M$, BASTA OSSERVARE CHE

$$f \cdot g = (f + M)(g + M) - Mf - Mg - M^2$$

E CHE $(f+M) \cdot (g+M)$ RIENTRA NEL CASO PARTICOLARE GIÀ TRATTATO.