Analisi Matematica 2

Prova Scritta del 23/06/2021 (Callegari-Ciolli) 1a

1 CALCOLARE $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\cdot\frac{e^{7x}-e^{x}}{e^{2x}-1}\,dx$

2 PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ SIANO $f(x)=\dfrac{5+e^{x^2}}{2+e^{x^2}}$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ E $G(x)=\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.

a) MOSTRARE CHE PER $x\to+\infty$ $F(x)$ HA UN ASINTOTO OBLIQUO $y=mx+q$ E STABILIRE IL SEGNO DI q.

b) TROVARE EVENTUALI SIMMETRIE DI $F(x)$ E $G(x)$.

c) TROVARE $\inf\{G(x)\mid x\in\mathbb{R}\}$

3 STUDIARE, AL VARIARE DI $x\in\mathbb{R}$, IL CARATTERE DI $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(4-\frac{1}{n}\right)^n\cdot x^n$.

4 SI CONSIDERI L'EQUAZIONE $\mathcal{L}(y)=e^{2x}$ DOVE $\mathcal{L}=D^3-D^2+D-I$.

a) TROVARNE LA SOL. GENERALE

b) TROVARNE LA SOL. $y(x)$ TALE CHE $y(0)=\frac{1}{5}$, $y'(0)=\frac{2}{5}$ E $y''(0)=\frac{4}{5}$.

c) TROVARNE TUTTE LE SOL. CHE SONO STRETTAMENTE POSITIVE $\forall x\in\mathbb{R}$.

d) TROVARE LA SOL. GENERALE DI $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}(y)=e^{2x}$

5 DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y'=-(x^3+y)^5 \\ y(0)=1 \end{cases}$, SI INDICHI CON $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE

a) MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

b) MOSTRARE CHE $y(x)\to-\infty$ PER $x\to+\infty$

FACOLTATIVO c) PER $x\to+\infty$ ESISTE IL LIMITE DI $y'(x)$? SE SI, TROVARLO.

6 AL VARIARE DI $\alpha>0$, PER OGNI $(x,y)\neq(0,0)$ DEFINIAMO $f(x,y)=\dfrac{x^{30}\cdot|y|^{\alpha}}{x^{40}+y^{24}}$.

a) PER QUALI α È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ IN $(0,0)$? b) PER QUALI α (LA SUA ESTENSIONE) È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$?

Analisi Matematica 2

Prova Scritta del 23/06/2021 (Callegari-Ciolli) 1b

1 CALCOLARE $\int_0^{+\infty} x \cdot \frac{e^{-4x}-e^{-x}}{e^{-x}-1}\,dx$

2 PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ SIANO $f(x)=\frac{3+e^{x^2}}{7+e^{x^2}}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ E $G(x)=\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.

a) MOSTRARE CHE PER $x\to+\infty$ $F(x)$ HA UN ASINTOTO OBLIQUO $y=mx+q$ E STABILIRE IL SEGNO DI q.

b) TROVARE EVENTUALI SIMMETRIE DI $F(x)$ E $G(x)$.

c) TROVARE $\sup\{G(x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

3 STUDIARE, AL VARIARE DI $x\in\mathbb{R}$, IL CARATTERE DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n$.

4 SI CONSIDERI L'EQUAZIONE $\mathcal{L}(y)=e^{-x}$ DOVE $\mathcal{L}=D^3+2D^2+4D+8I$.

a) TROVARNE LA SOL. GENERALE

b) TROVARNE LA SOL. $y(x)$ TALE CHE $y(0)=\frac{1}{5}$, $y'(0)=-\frac{1}{5}$ E $y''(0)=\frac{1}{5}$.

c) TROVARNE TUTTE LE SOL. CHE SONO STRETTAMENTE POSITIVE $\forall x\in\mathbb{R}$.

d) TROVARE LA SOL. GENERALE DI $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}(y)=e^{-x}$

5 DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y'=-(x^3+y)^5 \\ y(0)=1 \end{cases}$, SI INDICHI CON $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE

a) MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

b) MOSTRARE CHE $y(x)\to-\infty$ PER $x\to+\infty$

FACOLTATIVO c) PER $x\to+\infty$ ESISTE IL LIMITE DI $y'(x)$? SE SI, TROVARLO.

6 AL VARIARE DI $\alpha>0$, PER OGNI $(x,y)\neq(0,0)$ DEFINIAMO $f(x,y)=\frac{x^{15}\cdot|y|^\alpha}{x^{24}+y^8}$.

a) PER QUALI α È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ IN $(0,0)$? b) PER QUALI α LA SUA ESTENSIONE È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$?

Soluzioni 1a

1 SI OSSERVI CHE:

$$\frac{e^{7x}-e^{x}}{e^{2x}-1}=\frac{e^{x}(e^{2x}-1)(e^{4x}+e^{2x}+1)}{e^{2x}-1}=e^{5x}+e^{3x}+e^{x}$$

QUINDI L'INTEGRALE NON È IMPROPRIO PER $x\to 0^-$.

SI HA:

$$\int_{-\infty}^{0} x\,\frac{e^{7x}-e^{x}}{e^{2x}-1}\,dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot\left(e^{5x}+e^{3x}+e^{x}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0} x\cdot\left(\frac{1}{5}e^{5x}+\frac{1}{3}e^{3x}+e^{x}\right)'dx=$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\left(\left[x\cdot\left(\frac{1}{5}e^{5x}+\frac{1}{3}e^{3x}+e^{x}\right)\right]_{b}^{0}-\int_{b}^{0}\frac{1}{5}e^{5x}+\frac{1}{3}e^{3x}+e^{x}\,dx\right)=$$

$$=0-\lim_{b\to-\infty}\left[\frac{1}{25}e^{5x}+\frac{1}{9}e^{3x}+e^{x}\right]_{b}^{0}=-\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{9}+1\right)=-\frac{259}{225}$$

2 (a) SICCOME $f(x)\to 1$ PER $x\to+\infty$, SI HA CHE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE A $+\infty$, CIOÈ $F(x)\to+\infty$ PER $x\to+\infty$.

SAPPIAMO CHE $y=mx+q$ È ASINTOTO PER $x\to+\infty$ SE E SOLO SE:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}\quad \text{E}\quad q=\lim_{x\to+\infty}F(x)-mx.$$

SI HA:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

E INOLTRE:

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left(F(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \frac{5+e^{t^2}}{2+e^{t^2}}\,dt-\int_0^x 1\,dt\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\left(\frac{5+e^{t^2}}{2+e^{t^2}}-1\right)dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{3}{2+e^{t^2}}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{3}{2+e^{t^2}}\,dt$$

MA QUEST'ULTIMO INTEGRALE CONVERGE PERCHÉ $\frac{3}{1+e^{t^2}}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ PER $x\to+\infty$, QUINDI $q\in\mathbb{R}$. INOLTRE $q>0$ PERCHÉ L'INTEGRANDA È CONTINUA E STRETTAMENTE POSITIVA.

(b) SICCOME $f(x)$ È PARI, IN QUANTO

$$f(-x)=\frac{5+e^{(-x)^2}}{2+e^{(-x)^2}}=\frac{5+e^{x^2}}{2+e^{x^2}}=f(x),$$

POSSIAMO DIMOSTRARE CHE $F(x)$ È DISPARI E $G(x)$ È PARI.

INFATTI:

PERCHÉ f È PARI

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\,dt\overset{t=-u}{=}\int_0^{x}f(-u)\cdot(-1)\,du=-\int_0^x f(-u)\,du\overset{\downarrow}{=}-\int_0^x f(u)\,du=-F(x)$$

$$G(-x)=\int_{-x-1}^{-x+1}f(t)\,dt\overset{t=-u}{=}\int_{x+1}^{x-1}f(-u)\cdot(-1)\,du=\int_{x-1}^{x+1}f(-u)\,du\overset{\downarrow}{=}\int_{x-1}^{x+1}f(u)\,du=G(x)$$

(c) SI HA:

$$G(x)=\int_{x-1}^{x+1}\frac{5+e^{t^2}}{2+e^{t^2}}\,dt=\int_{x-1}^{x+1}1+\frac{3}{2+e^{t^2}}\,dt=2+\int_{x-1}^{x+1}\frac{3}{2+e^{t^2}}\,dt$$

DA CUI SEGUE SUBITO $G(x)>2$ PER OGNI $x\in\mathbb{R}$.

INOLTRE, PER $x\geq 1$ VALGONO LE DISUGUAGLIANZE

PERCHÉ L'INTEGRANDA È DECRESCENTE

$$0\leq\int_{x-1}^{x+1}\frac{3}{2+e^{t^2}}\,dt\overset{\downarrow}{\leq}\frac{3}{2+e^{(x-1)^2}}\cdot\int_{x-1}^{x+1}1\,dt=\frac{6}{2+e^{(x-1)^2}}$$

DALLE QUALI SEGUE CHE, PER $x\to+\infty$, SI HA $\int_{x-1}^{x+1}\frac{3}{2+e^{t^2}}\,dt\to 0$ E QUINDI ANCHE $G(x)\to 2$. QUESTO, COMBINATO COL FATTO CHE $G(x)>2$ PER OGNI $x\in\mathbb{R}$, CI GARANTISCE CHE $\inf\{G(x)\mid x\in\mathbb{R}\}=2$.

3 IL RAGGIO DI CONVERGENZA È $\rho = \frac{1}{4}$ PERCHÉ:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdot\left(4-\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\cdot\left(4-\frac{1}{n}\right) \to 1\cdot 4 = 4 \quad \text{PER } n\to+\infty.$$

QUINDI SAPPIAMO CHE LA SERIE CONVERGE SE $|x|<\frac{1}{4}$ E NON CONVERGE SE $|x|>\frac{1}{4}$.

RIMANE DA STUDIARE COSA SUCCEDE PER $x=\pm\frac{1}{4}$.

PER $x=\frac{1}{4}$ SI HA:

$$\frac{1}{n}\left(4-\frac{1}{4}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^n \approx \frac{1}{n}\cdot e^{-\frac{1}{4}}$$

QUINDI LA NOSTRA SERIE DIVERGE PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

INVECE, PER $x=-\frac{1}{4}$ LA NOSTRA SERIE DIVENTA:

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{4n}\right)^n$$

GRAZIE AL FATTO CHE $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ CONVERGE, IL CARATTERE DI (2) È UGUALE A QUELLO DI:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^n-\frac{(-1)^n}{n}\cdot e^{-\frac{1}{4}}\right)$$

SE, PER COMODITÀ, INDICHIAMO CON a_n IL SUO TERMINE, SI HA:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{4n}\right)^n-e^{-\frac{1}{4}}\right)=\frac{(-1)^n}{n}\cdot\left(e^{n\ln\left(1-\frac{1}{4n}\right)}-e^{-\frac{1}{4}}\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n}\cdot e^{-\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{1}{4}+n\ln\left(1-\frac{1}{4n}\right)}-1\right)$$

MA, SICCOME SI HA:

$$\frac{1}{4}+n\ln\left(1-\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{4}+n\left(-\frac{1}{4n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

OTTENIAMO:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n}\cdot e^{-\frac{1}{4}}\cdot\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

DA CIÒ SEGUE CHE $\sum|a_n|$ CONVERGE E QUINDI ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE.

QUINDI ANCHE (2) CONVERGE.

4 (a) IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $\mathcal{L}$ È:

$$P(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

LE CUI RADICI SONO 1, i E $-i$, QUINDI LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$y(x)=Ae^x+B\cos x+C\sin x \qquad A,B,C\in\mathbb{R}$$

ORA, POICHÉ 2 NON È RADICE DI $P(\lambda)$, CERCHIAMO UNA SOL PARTICOLARE DI $\mathcal{L}(y)=e^{2x}$

TRA LE FUNZIONI DEL TIPO $y_0(x)=ce^{2x}$, MA SICCOME SI HA:

$$\mathcal{L}(ce^{2x})=8ce^{2x}-4ce^{2x}+2ce^{2x}-ce^{2x}=5ce^{2x}$$

PER OTTENERE $\mathcal{L}(ce^{2x})=e^{2x}$ DEVE ESSERE $c=\frac{1}{5}$, QUINDI $y_0(x)=\frac{1}{5}e^{2x}$ E

DUNQUE LA SOL. GENERALE DI $\mathcal{L}(y)=e^{2x}$ È:

(3) $$y(x)=Ae^x+B\cos x+C\sin x+\frac{1}{5}e^{2x} \qquad \text{CON } A,B,C\in\mathbb{R}$$

(b) DERIVANDO RIPETUTAMENTE (3) SI OTTIENE:

$$y'(x)=Ae^x-B\sin x+C\cos x+\frac{2}{5}e^{2x}$$

$$y''(x)=Ae^x-B\cos x-C\sin x+\frac{4}{5}e^{2x}$$

QUINDI LE CONDIZIONI INIZIALI $y(0)=\frac{1}{5}$, $y'(0)=\frac{2}{5}$ E $y''(0)=\frac{4}{5}$ DIVENTANO:

$$\begin{cases} A+B+\frac{1}{5}=\frac{1}{5} \\ A+C+\frac{2}{5}=\frac{2}{5} \\ A-B+\frac{4}{5}=\frac{4}{5} \end{cases}$$

DA CUI SEGUE $A=B=C=0$. QUINDI LA SOL. CERCATA È $y(x)=\frac{1}{5}e^{2x}$.

(c) AFFINCHÉ LA $y(x)$ DATA DA (3) SIA POSITIVA È NECESSARIO CHE $B=C=0$,

ALTRIMENTI IL TERMINE $B\cos x+C\sin x$ OSCILLEREBBE TRA $-\sqrt{B^2+C^2}$

E $\sqrt{B^2+C^2}$ QUINDI, PER $x\to-\infty$, $y(x)$ SAREBBE FREQUENTEMENTE NEGATIVA

PERCHÉ I TERMINI RIMANENTI SONO INFINITESIMI.

QUINDI $y(x)$ È DELLA FORMA

(4) $$y(x)=Ae^x+\frac{1}{5}e^{2x}=e^x\left(A+\frac{1}{5}e^x\right)$$

DALLA (4) SEGUE CHE, SE FOSSE $A<0$, SI AVREBBE $y(x)<0$ SU UN'OPPORTUNA SEMIRETTA SINISTRA. QUINDI, PER AVERE $y(x)>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ BISOGNA CHE NELLA (4) SIA $A \geq 0$. IL FATTO CHE TALE CONDIZIONE SIA ANCHE SUFFICIENTE È OVVIO.

(d) ABBIAMO GIÀ VISTO NEL PUNTO (a) CHE $\mathcal{L}(ce^{2x}) = \frac{1}{5}ce^{2x}$, QUINDI

$$\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}(ce^{2x}) = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot ce^{2x}.$$

DI CONSEGUENZA UNA SOL. PARTICOLARE È $y_0(x) = \frac{1}{625}e^{2x}$.

INOLTRE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}$ È $(p(\lambda))^4$ DOVE $p(\lambda)$ È IL POL. CARATTERISTICO DI $\mathcal{L}$. QUINDI LE RADICI DI $(p(\lambda))^4$ SONO:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = i \\ \lambda = -i \end{array}\right\} \text{TUTTE CON MOLTEPLICITÀ } 4.$$

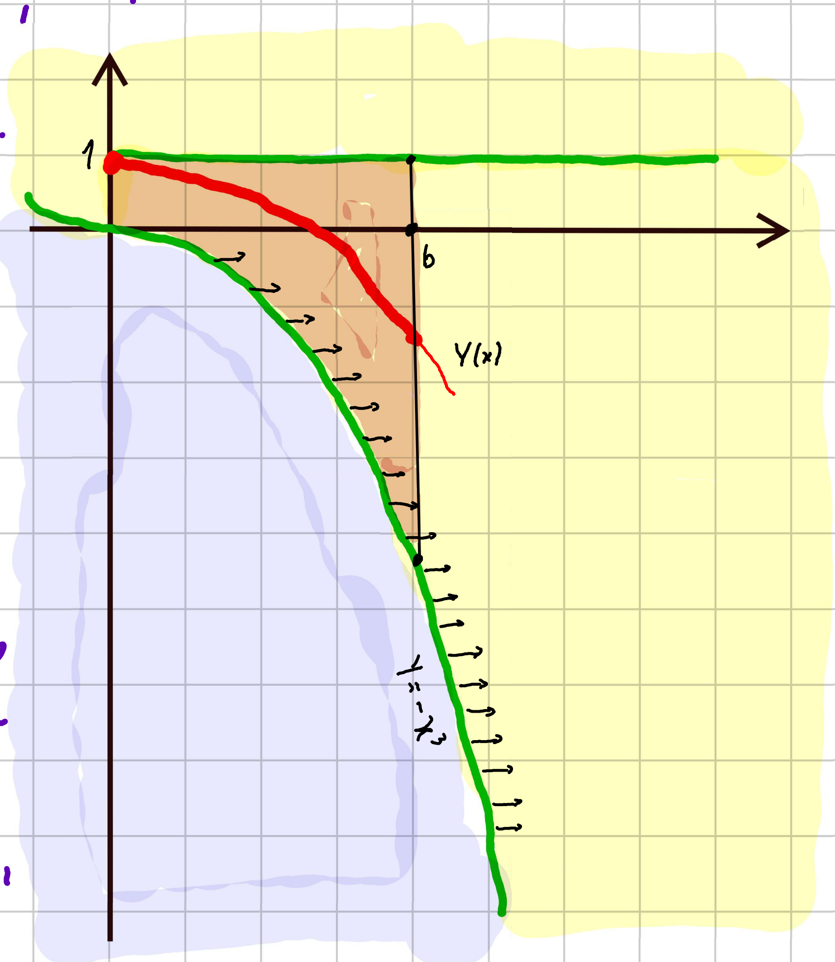
LA SOL. GENERALE È PERCIÒ:

$$y(x) = (A+Bx+Cx^2+Dx^3)e^x + (a+bx+cx^2+dx^3)\cos x + (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)\sin x + \frac{1}{625}e^{2x}$$

CON $A, B, C, D, a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

5 (a) IL SECONDO MEMBRO DELL'EQUAZ. SI ANNULLA SUI PUNTI DELLA CURVA $y=-x^3$, CHE QUINDI, PER $x>0$ È UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA, VISTO CHE $(-x^3)' = -3x^2 < 0$.

INVECE IL II MEMBRO DELL'EQUAZ. È POSITIVO NELLA ZONA AZZURRA, CIOÈ $U = \{(x,y) \mid y < -x^3\}$ E NEGATIVO NELLA ZONA GIALLA/ARANCIONE, CIOÈ $V = \{(x,y) \mid y > -x^3\}$.



SI NOTI CHE PROLUNGANDO IN AVANTI

LA NOSTRA SOL. $y(x)$, GRAZIE AL TEO. DELLA SOTTOSOLUZIONE, NON PUÒ MAI INTERSECARE $y=-x^3$. QUINDI IL GRAFICO DI $y(x)$ RIMANE SEMPRE NELLA ZONA V E QUINDI $y'(x)<0$. CIÒ SIGNIFICA CHE $y(x)$, PER $x>0$ FINCHÉ ESISTE È STRETTAMENTE DECRESCENTE E QUINDI $y(x)<y(0)=1$.

SIAMO ORA IN GRADO DI DIMOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

INFATTI, SE PER ASSURDO L'INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE AVESSE COME SECONDO ESTREMO $b<+\infty$, ALLORA PER $0<x<b$ IL GRAFICO DI $y(x)$ SAREBBE CONTENUTO NEL COMPATTO $K=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq b,\ -x^3\leq y\leq 1\}$ E QUINDI, GRAZIE AL TEO. DI PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI, $y(x)$ POTREBBE ESSERE PROLUNGATA OLTRE b, IN CONTRASTO COL FATTO CHE b È IL II ESTREMO DELL'INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE.

QUINDI $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

(b) POICHÉ PER $x>0$ $y(x)$ DECRESCE, SIAMO CERTI CHE $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ ESISTE.

SE PER ASSURDO NON FOSSE $-\infty$ MA $\ell\in\mathbb{R}$, ALLORA SI AVREBBE:

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x)=\lim_{x\to+\infty} -\left(x^3+y(x)\right)^5=-\left(+\infty+\ell\right)^5=-\infty$$

OTTERREMMO QUINDI CHE $\exists\, x_0\geq 0$ TALE CHE $y'(x)<-1$ PER $x\geq x_0$.

MA ALLORA $\forall x>x_0$ SI HA:

$$y(x)=y(x_0)+\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt<y(x_0)+\int_{x_0}^{x} -1\,dt=y(x_0)-(x-x_0)\longrightarrow -\infty \text{ PER } x\to+\infty$$

CHE CONTRADDICE L'ASSUNZIONE $y(x)\to\ell$.

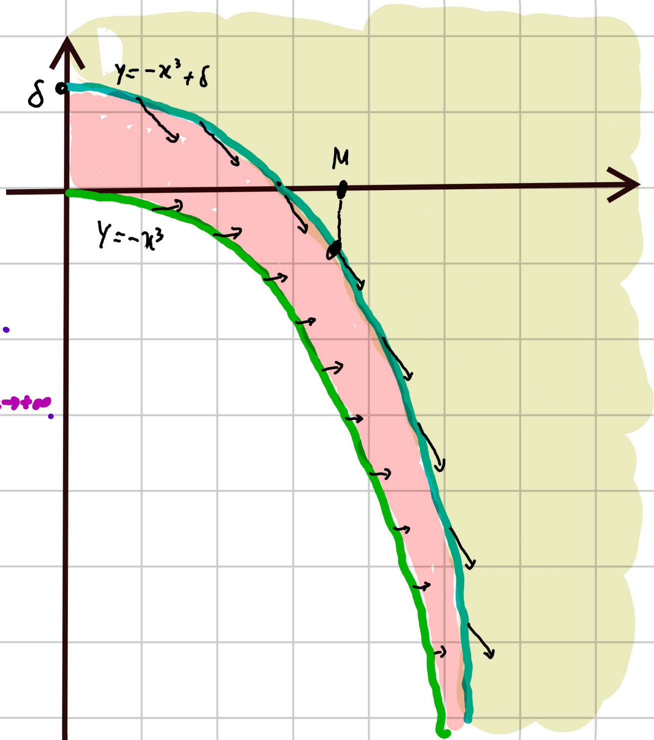
QUINDI PER $x\to+\infty$ DEVE ESSERE $y(x)\to-\infty$.

(c) PER OGNI FISSATO $\delta>0$, CONSIDERIAMO LA CURVA $y=-x^3+\delta$ (GRAFICO AZZURRO IN FIGURA).

LA SUA DERIVATA È $-3x^2$, CHE TENDE A $-\infty$ PER $x\to+\infty$.

INVECE NE SUOI PUNTI IL II MEMBRO DELL'EQUAZ. HA VALORE COSTANTE $-\delta^5$.

QUINDI $\exists\, M>0$ TALE CHE PER $x>M$ LA CURVA $y=-x^3+\delta$ È UNA SOTTOSOLUZIONE.



CIÒ SIGNIFICA CHE PER $x > M$ OGNI SOLUZIONE DELL'EQUAZ. PUÒ INTERSECARLA AL MASSIMO UNA VOLTA. DI CONSEGUENZA ANCHE LA SOL. $y(x)$ DEL NOSTRO P. DI CAUCHY PER $x \to +\infty$ SODDISFERÀ UNA DELLE 2 CONDIZIONI:

$$(5)\quad y(x) > -x^3+\delta \qquad\qquad (6)\quad y(x) < -x^3+\delta$$

MA (6) NON PUÒ VALERE DEFINITIVAMENTE, ALTRIMENTI ESISTEREBBE $\bar{x} > 0$ TALE CHE PER $x > \bar{x}$ SI AVREBBE:

$$y'(x) = -\left(x^3+y(x)\right)^5 > -\delta^5$$

DA CUI SEGUIREBBE:

$$y(x) = y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} y'(t)\,dt > y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} -\delta^5\,dt = y(\bar{x}) - \delta^5(x-\bar{x})$$

CHE CONTRADDICE (6) IN QUANTO, PER $x \to +\infty$, DEFINITIVAMENTE SI HA:

$$-x^3+\delta < y(\bar{x}) - \delta^5(x-\bar{x})$$

QUINDI DEVE VALERE (5), CIOÈ SI HA CHE:

(7) $$\forall \delta > 0 \ \exists \rho > 0 \text{ TALE CHE } x > \rho \Rightarrow y(x) > -x^3+\delta$$

MA POICHÉ:

$$y(x) > -x^3+\delta \Rightarrow y'(x) = -\left(x^3+y(x)\right)^5 < -\delta^5$$

LA (7) DIVENTA:

$$\forall \delta > 0 \ \exists \rho > 0 \text{ TALE CHE } x > \rho \Rightarrow y'(x) < -\delta^5$$

CHE SIGNIFICA APPUNTO CHE $y'(x) \to -\infty$ PER $x \to +\infty$.

$\boxed{6}$ (a) POICHÉ $f(0,y)$ È IDENTICAMENTE NULLA PER OGNI α, $f(x,y)$ È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ IN $(0,0)$ SE E SOLO SE $f(x,y) \to 0$ PER $(x,y) \to (0,0)$. MOSTRIAMO CHE CIÒ ACCADE SE E SOLO SE $\alpha > 6$.

SE $\alpha>6$ SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{30}\cdot|y|^{\alpha}}{x^{40}+y^{24}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{|x^5|^6\cdot|y^3|^2}{|x^5|^8+|y^3|^8}}}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{|y|^{\alpha-6}}_{\substack{\downarrow\ (\alpha>6)\\ 0}} = 0$$

LIMITATA PERCHÉ, POSTO $a=x^5$ E $b=y^3$ SI OTTIENE $\frac{a^6\cdot b^2}{a^8+b^8}$ CHE È LIMITATA SULLA CIRCONFERENZA UNITARIA GRAZIE AL T. DI WEIERSTRASS. INOLTRE È COSTANTE SULLE SEMIRETTE CHE NASCONO IN $(0,0)$ PERCHÉ È POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO ZERO. QUINDI È LIMITATA SU TUTTO $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

D'ALTRA PARTE, POSTO:

$$\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\, y>0,\, y^3=x^5\}$$

SE $0<\alpha\leq 6$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Gamma}} f(x,y) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{30+\frac{5}{3}\alpha}}{2\cdot x^{60}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{5}{3}\alpha-10} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{SE } \alpha=6 \\ +\infty & \text{SE } \alpha<6 \end{cases}$$

QUINDI SE $\alpha\leq6$ IL LIMITE NON PUÒ ESSERE ZERO E PERCIÒ, PER QUANTO DETTO PRIMA, NON PUÒ ESISTERE.

(b) L'ESTENSIONE DI $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ SE E SOLO SE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

CIOÈ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

DOBBIAMO QUINDI TROVARE PER QUALI $\alpha>6$ VALE ZERO IL LIMITE:

(9) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{30}|y|^{\alpha}}{(x^{40}+y^{24})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}.$$

MOSTRIAMO CHE QUESTO ACCADE SE E SOLO SE $\alpha>6+\frac{3}{5}$.

INFATTI SE $\alpha>6+\frac{3}{5}$ IL LIMITE (9) DIVENTA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|x^5|^{\frac{29}{5}}\cdot|y^3|^{\frac{11}{5}}}{|x^5|^8+|y^3|^8}}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{|y|^{\alpha-\frac{33}{5}}}_{\substack{\downarrow\ (\alpha>6+\frac{3}{5})\\ 0}} = 0$$

SI RAGIONA COME NEL PUNTO (a) PONENDO $a=x^5$ E $b=y^3$

INVECE, SE $0<\alpha\leq6+\frac{3}{5}$, PRESA Γ COME IN (8) SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{30}\cdot x^{\frac{5}{3}\alpha}}{2\cdot x^{40}\cdot\sqrt{x^2+x^{\frac{10}{3}}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{5}{3}\alpha-11} = \begin{cases} =\frac{1}{2} & \text{SE } \alpha = 6+\frac{3}{5} \\ =+\infty & \text{SE } \alpha < 6+\frac{3}{5} \end{cases}$$

QUINDI IL LIMITE (9) VALE ZERO SE E SOLO SE $\alpha > 6+\frac{3}{5}$, DUNQUE PER TALI VALORI DI α SI HA LA DIFFERENZIABILITÀ.

Soluzioni $\boxed{1b}$

$\boxed{1}$ SI OSSERVI CHE

$$\frac{e^{-4x}-e^{-x}}{e^{-x}-1}=\frac{e^{-x}(e^{-x}-1)(e^{-2x}+e^{-x}+1)}{e^{-x}-1}=e^{-3x}+e^{-2x}+e^{-x}$$

QUINDI L'INTEGRALE NON È IMPROPRIO PER $x\to 0^+$.

SI HA:

$$\int_0^{+\infty} x\,\frac{e^{-4x}-e^{-x}}{e^{-x}-1}\,dx=\int_0^{+\infty} x\cdot\left(e^{-3x}+e^{-2x}+e^{-x}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}\right)'dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\left[x\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}\right)\right]_0^b+\int_0^b \frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+e^{-x}\,dx\right)=$$

$$=0+\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{9}e^{-3x}-\frac{1}{4}e^{-2x}-e^{-x}\right]_0^b=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+1=\frac{49}{36}$$

$\boxed{2}$ (a) CON CALCOLI IDENTICI ALLA $\boxed{\text{VERSIONE A}}$ SI TROVA CHE L'ASINTOTO OBLIQUO È DEL TIPO $y=x+q$, CON L'UNICA DIFFERENZA CHE $q<0$ PERCHÉ:

$$q=\lim_{x\to+\infty}\left(F(x)-1\cdot x\right)=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\left(\frac{3+e^{t^2}}{7+e^{t^2}}-1\right)dt=\ldots=\int_0^{+\infty}-\frac{4}{7+e^{t^2}}\,dt<0$$

(b) SI TROVA CHE $F(x)$ È DISPARI E $G(x)$ È PARI CON PROCEDIMENTO IDENTICO A QUELLO DELLA $\boxed{\text{VERSIONE A}}$.

(c) SI HA:

$$G(x)=\int_{x-1}^{x+1}\frac{3+e^{t^2}}{7+e^{t^2}}\,dt=\int_{x-1}^{x+1}1-\frac{4}{7+e^{t^2}}\,dt=2-\int_{x-1}^{x+1}\frac{4}{7+e^{t^2}}\,dt$$

DA CUI, ARGOMENTANDO IN MODO SIMILE ALLA VERSIONE A SEGUE CHE:

$$\sup G(x)=\lim_{x\to+\infty}G(x)=2-0=2.$$

3 CON PROCEDIMENTO IDENTICO A QUELLO DELLA VERSIONE A SI TROVA CHE IL RAGGIO DI CONVERGENZA È $\rho=\frac{1}{3}$ E CHE LA SERIE CONVERGE PER $x=-\frac{1}{3}$ MA NON PER $x=\frac{1}{3}$. QUINDI, RIASSUMENDO, CONVERGE SE E SOLO SE $-\frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{3}$.

4 ANCHE STAVOLTA IL PROCEDIMENTO È IDENTICO A QUELLO DELLA VERSIONE A E LE DIFFERENZE RIGUARDANO SOLO I DATI NUMERICI.

(a) IL POL. CARATTERISTICO È $P(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+8=(\lambda^2+4)(\lambda+2)$ E LA SOL. PARTICOLARE È $y_0(x)=\frac{1}{5}e^{-x}$, QUINDI LA SOL. GEN. È:

$$y(x)=Ae^{-2x}+B\cos 2x+C\sin 2x+\frac{1}{5}e^{-x}\qquad A,B,C\in\mathbb{R}$$

(b) I DATI INIZIALI CORRISPONDONO AL CASO $A=B=C=0$ CIOÈ $y(x)=\frac{1}{5}e^{-x}$.

(c) $\left(y(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}\right)\iff\left(B=C=0\ \text{e}\ A\geq 0\right)$

(d) LA SOL. GENERALE È:

$$y(x)=(A+Bx+Cx^2+Dx^3)e^{-2x}+(a+bx+cx^2+dx^3)\cos 2x+(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)\sin 2x+\frac{1}{625}e^{-x}$$

5 È LO STESSO PROBLEMA DELLA VERSIONE A.

6 PROCEDENDO COME NELLA VERSIONE A SI TROVA CHE È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ SE E SOLO SE $\alpha>3$, MENTRE L'ESTENSIONE È ANCHE DIFFERENZIABILE SE E SOLO SE $\alpha>3+\frac{1}{3}$.