Analisi Matematica 2

Scritto del 20/07/2021 (Callegari-Ciolli) **2a**

1 SIA $f(x)=\left(\ln(1+x^2)+\arctan(1+x^2)\right)\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^{\alpha}}$ CON $\alpha>0$ PARAMETRO REALE.

a) DIRE PER QUALI $\alpha>0$ $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE.

b) CALCOLARE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ PER $\alpha=2$.

c) CALCOLARE $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ PER $\alpha=100$.

2 STUDIARE CONVERGENZA SEMPLICE E ASSOLUTA DI $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$.

3 DATA LA FUNZIONE INTEGRALE $F(x)=\int_0^x \frac{e^{\sin t}}{\sqrt{|t-1|}}\,dt$

a) DIRE PER QUALI $x\in\mathbb{R}$ È DEFINITA E DETERMINARE EVENTUALI ASINTOTI.

b) DIRE SE È MONOTONA, LIPSCHITZIANA, UNIFORMEMENTE CONTINUA.

4 TROVARE LA SOL. GENERALE DI $y^{(4)}-3y'''+3y''-3y'+2y=20e^{3x}$ DOPODICHÉ STABILIRE QUALI SOLUZIONI SONO: a) $o(e^{2x})$ PER $x\to-\infty$ b) STRETTAMENTE POSITIVE PER OGNI $x\in\mathbb{R}$.

FACOLTATIVO

5 DATO IL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} y'=3\sqrt{xy+A}\cdot e^{x\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ y(1)=y_0 \end{cases}$ CON A PARAMETRO REALE.

a) PER $A=0$ TROVARE LE SOL. NEI CASI $y_0=1$, $y_0=\ln^2(e+1)$ E $y_0=\ln^2(e-1)$.

FACOLTATIVO

b) PER $A=-\frac{1}{2}$ E $y_0=1$ MOSTRARE CHE LA SOL. $y(x)$ È PROLUNGABILE IN AVANTI FINO A $+\infty$ E PER $x\to+\infty$ SI HA $y(x)\to+\infty$.

6 CALCOLARE, O DIMOSTRARE CHE NON ESISTE, IL LIMITE $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6\cdot y^6}{x^{\alpha}+y^{14}}$ NEI CASI:

a) $\alpha=10$. b) $\alpha=7$.

Soluzioni 2a

1 (a) LA FUNZIONE INTEGRANDA $f(x)$ È CONTINUA SU TUTTO $[0,+\infty)$ QUINDI BASTA CONTROLLARE COSA SUCCEDE PER $x\to+\infty$. INOLTRE IL CARATTERE NON CAMBIA SE IL PRIMO ESTREMO È 2 INVECE DI 0.

PER $x\to+\infty$ SI HA:

$$f(x)\simeq\frac{2x\ln x}{x^{2\alpha}}=\frac{2\ln x}{x^{2\alpha-1}}$$

QUINDI IL NOSTRO INTEGRALE HA LO STESSO CARATTERE DI $\int_2^{+\infty}\frac{2\ln x}{x^{2\alpha-1}}\,dx$

CHE CONVERGE SE E SOLO SE $2\alpha-1>1$, CIOÈ PER $\alpha>1$.

(b) SI HA:

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left(\ln(1+x^2)+\arctan(1+x^2)\right)\cdot\frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}\,dx=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{1+b^2}\left(\ln t+\arctan t\right)\cdot\frac{1}{t^2}\,dt=\lim_{c\to+\infty}\int_1^c\left(\ln t+\arctan t\right)\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)'dt=$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\left(\left[-\frac{\ln t+\arctan t}{t}\right]_1^c+\int_1^c\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t(1+t^2)}\,dt\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{c\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{t}\right]_1^c+\int_1^c\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2(1+t^2)}\,dt\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}+1+\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2}\int_1^{c^2}\frac{1}{u(1+u)}\,du=$$

$$=\frac{\pi}{4}+1+\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2}\int_1^{c^2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=$$

$$=1+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{u}{u+1}\right)\right]_1^{c^2}=1+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\lim_{c^2\to+\infty}\left(\ln\frac{c^2}{c^2+1}-\ln\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$$

(C) SAPPIAMO CHE PER $\alpha = 100$ $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE E INOLTRE $f(x)$ È DISPARI, QUINDI, DETTO λ IL VALORE A CUI CONVERGE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, SI HA:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{0} f(x)\,dx \overset{\boxed{x=-t}}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_{b}^{0} f(-t)\cdot(-1)\,dt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_{b}^{0} f(t)\,dt = \lim_{b\to+\infty} -\int_{0}^{b} f(t)\,dt = -\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = -\lambda$$

QUINDI:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = -\lambda + \lambda = 0$$

2 LA CONVERGENZA SEMPLICE È OVVIA PERCHÈ SIA $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ SIA $\sum (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ CONVERGONO PER IL CR. DI LEIBNIZ.

PER STUDIARE LA CONV. ASSOLUTA SI OSSERVI CHE:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2n} - O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} + \frac{1}{2n} - O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \approx \frac{1}{2n}$$

QUINDI IL CARATTERE DI: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right|$

È LO STESSO DI $\sum \frac{1}{2n}$, CHE DIVERGE. QUINDI LA NOSTRA SERIE NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE.

3 (a) LA FUNZIONE INTEGRANDA $f(t) = \frac{e^{\cos t}}{\sqrt{|t-1|}}$ HA UN ASINTOTO

VERTICALE PER $t=1$ MA SICCOME $f(t) \approx \frac{c}{\sqrt{|t-1|}}$ SIA PER $x \to 1^-$ CHE PER $x \to 1^+$, GLI INTEGRALI:

$$\int_0^1 f(t)\,dt \quad \text{E} \quad \int_1^2 f(t)\,dt$$

CONVERGONO, QUINDI $\int_0^x f(t)\,dt$ È BEN DEFINITO ANCHE PER $x \geq 1$.
QUINDI $F(x)$ È BEN DEFINITA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. INOLTRE SI HA:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{\sqrt{|t-1|}}\,dt$$

CHE DIVERGE A $+\infty$ PERCHÉ:

$$f(t) \geq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{|t-1|}} \geq \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{PER OGNI } t>1$$

E $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ DIVERGE A $+\infty$.

QUINDI $F(x) \to +\infty$ PER $x \to +\infty$. TUTTAVIA NON C'È L'ASINTOTO OBLIQUO PERCHÉ:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sin t}}{\sqrt{|t-1|}} = 0$$

IN MODO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE $F(x) \to -\infty$ PER $x \to -\infty$ E CHE ANCHE A $-\infty$ NON C'È ASINTOTO OBLIQUO.

(b) $F(x)$ È CRESCENTE PERCHÉ L'INTEGRANDA È POSITIVA.
PER $x \neq 1$ È DERIVABILE PERCHÉ $F'(x) = \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{|x-1|}}$ PER IL T.F.C.I., QUINDI SUGLI INSIEMI DEL TIPO $[a,+\infty)$ CON $a>1$ LA DERIVATA È SEMPRE LIMITATA DALLA COSTANTE $L_a = \frac{e}{\sqrt{a-1}}$. DI CONSEGUENZA

$$\forall a>1 \quad F(x) \text{ È LIPSCHITZIANA SU } [a,+\infty) \text{ CON COSTANTE } L_a = \frac{e}{\sqrt{a-1}}$$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE:

$$\forall b<1 \quad F(x) \text{ È LIPSCHITZIANA SU } (-\infty,b] \text{ CON COSTANTE } L_b = \frac{e}{\sqrt{1-b}}$$

INVECE NON È LIPSCITZIANA SU TUTTO $\mathbb{R}$ PERCHÉ $F'(x) = \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{|t-1|}} \to +\infty$

PER $x \to 1$, QUINDI ESISTONO VICINO AD $x=1$, RAPPORTI INCREMENTALI ARBITRARIAMENTE GRANDI.

TUTTAVIA, ANCHE SE $F'(1)$ NON ESISTE, $F(x)$ È CONTINUA PER $x=1$ PERCHÉ, PER DEFINIZIONE DI INT. IMPROPRIO CONVERGENTE SI HA:

$$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b f(t)\,dt = \lim_{b\to 1^-} F(b) = \lim_{x\to 1^-} F(x)$$

E, ANALOGAMENTE:

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{b\to 1^+} \left(\int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^b f(t)\,dt \right) = F(1) + 0 = F(1)$$

QUINDI $F(x)$ È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

IN PARTICOLARE $F(x)$ È CONTINUA SUL COMPATTO $[-3,3]$ E QUINDI, PER IL TEO. DI HEINE-CANTOR, È ANCHE UNIFORM. CONTINUA SU $[-3,3]$. D'ALTRA PARTE SAPPIAMO CHE È LIPSCHITZIANA, E QUINDI UNIF. CONTINUA, SU $(-\infty,-2]$ E SU $[2,+\infty)$.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $F(x)$ È UNIF. CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

$\boxed{4}$ IL POLINOMIO CARATTERISTICO È:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda^2+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

QUINDI LA SOL. GENERALE È

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + Ce^x + De^{2x} + y_0(x) \quad \text{CON } A,B,C,D \in \mathbb{R}$$

DOVE $y_0(x)$ È UNA SOL. PARTICOLARE DA DETERMINARE.

CERCHIAMOLA DELLA FORMA $y_0(x) = K\cdot e^{3x}$. SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE SI TROVA:

$$81Ke^{3x} - 3\cdot 27Ke^{3x} + 3\cdot 9Ke^{3x} - 3\cdot 3Ke^{3x} + 2\cdot Ke^{3x} = 20e^{3x}$$

CIOÈ:

$$20Ke^{3x} = 20e^{3x}$$

DA CUI SEGUE $K=1$. QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + Ce^x + De^{2x} + e^{3x} \quad \text{CON } A,B,C,D \in \mathbb{R}.$$

(a) SE A E B NON SONO ENTRAMBE NULLE IL TERMINE $A\cos x + B\sin x$ È PERIODICO E CONTINUA AD OSCILLARE TRA DUE VALORI ρ E $-\rho$.
QUINDI, SICCOME GLI ALTRI TERMINI DI $y(x)$ SONO INFINITESIMI PER $x\to-\infty$, AFFINCHÈ $y(x)\to 0$ PER $x\to-\infty$ BISOGNA CHE $A=B=0$.
A QUESTO PUNTO, SE FOSSE $C\neq 0$, PER $x\to-\infty$ SI AVREBBE $y(x)\simeq Ce^{x}$, CHE NON È $o(e^{2x})$. QUINDI DEVE ESSERE $C=0$.
INFINE DEVE ESSERE ANCHE $D=0$, ALTRIMENTI $y(x)\simeq De^{2x}$, CHE NON È $o(e^{2x})$. D'ALTRA PARTE, SE $A=B=C=D$ SI HA $y(x)=e^{3x}=o(e^{2x})$.
QUINDI L'UNICA SOL. CHE VA BENE È $y(x)=e^{3x}$.

(b) DEVE ESSERE $A=B=0$ ALTRIMENTI IL TERMINE $A\cos x + B\sin x$ È PERIODICO E ASSUME ANCHE VALORI NEGATIVI QUINDI, SICCOME GLI ALTRI TERMINI DI $y(x)$ SONO INFINITESIMI PER $x\to-\infty$, ANCHE $y(x)$ ASSUME FREQUENTEMENTE VALORI NEGATIVI PER $x\to-\infty$.
APPURATO CHE DEVE ESSERE $A=B=0$, SI OTTIENE ANCHE CHE $C\geq 0$, PERCHÈ ALTRIMENTI, PER $x\to+\infty$ SI AVREBBE $y(x)\simeq Ce^{x}<0$.
MA, PER $A=B=0$ E $C\geq 0$, $y(x)$ SI PUÒ RISCRIVERE NEL MODO SEGUENTE

$$y(x) = Ce^{x}+De^{2x}+e^{3x} = e^{x}\cdot\left(e^{2x}+De^{x}+C\right) =$$

$$= e^{x}\left((e^{x})^{2}-2\sqrt{C}\cdot e^{x}+C+(D+2\sqrt{C})e^{x}\right) =$$

$$= e^{x}\cdot\left(e^{x}-\sqrt{C}\right)^{2}+(D+2\sqrt{C})e^{2x}$$

DA CUI SI DEDUCE CHE $y(x)>0$ PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ SE E SOLO SE:

$$(C=0 \text{ e } D\geq 0) \text{ o } (C>0 \text{ e } D>-2\sqrt{C})$$

5 (a) PER $A=1$ L'EQUAZIONE DIVENTA:

(1) $$y' = 3\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot e^{x\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{y}}$$

CHE È A VARIABILI SEPARABILI ED È DEFINITA NEL I° QUADRANTE, CIOÈ IN $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0 \text{ e } y\geq 0\}$. ATTENZIONE CHE LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ VIENE MENO NEI PUNTI CON $y=0$, QUINDI LA SOLUZIONE COSTANTE $y(x)\equiv 0$ PUÒ ESSERE INTERSECATA.

TROVIAMO LE ALTRE SOL. SEPARANDO LE VARIABILI. FINCHÉ $y(x)\neq 0$ LA (1) SI PUÒ SCRIVERE:

$$e^{\sqrt{y(x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y(x)}}\cdot y'(x) = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}\cdot e^{x\sqrt{x}}$$

CIOÈ:

$$\left(e^{\sqrt{y(x)}}\right)' = \left(e^{x\sqrt{x}}\right)'$$

CIOÈ:

(2) $$e^{\sqrt{y(x)}} = e^{x\sqrt{x}} + k \quad \text{CON } k\in\mathbb{R}$$

SE $y(1)=1$ LA (2) IMPLICA $e=e+k$, DA CUI SEGUE $k=0$ E QUINDI SI OTTIENE LA SOLUZIONE:

(3) $$y(x)=x^3$$

CHE SODDISFA L'EQUAZIONE PER OGNI $x\geq 0$.

INVECE, SE $y(1)=\ln^2(e+1)$, PER $x=1$ LA (2) DIVENTA $e+1=e+k$, DA CUI SEGUE CHE $k=1$ E QUINDI LA SOL. CHE SI OTTIENE DA (2) È

$$y(x) = \ln^2\left(e^{x\sqrt{x}}+1\right)$$

CHE PURE SODDISFA L'EQUAZIONE PER OGNI $x\geq 0$.

INFINE, SE $y(1)=\ln^2(e-1)$, PER $x=1$ LA (2) DIVENTA $e-1=e+k$, DA CUI SEGUE $k=-1$ E QUINDI

$$y(x)=\ln^2\left(e^{x\sqrt{x}}-1\right)$$

STAVOLTA PERÒ $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE SOLO PER $x \geq \sqrt[3]{\ln^2 x}$

TUTTAVIA È IMMEDIATO VERIFICARE CHE PER $x = \sqrt[3]{\ln^2 x}$

$y(x)$ È TANGENTE ALLA SOLUZIONE COSTANTE NULLA.

BASTA QUINDI PRENDERE

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{PER } 0 \leq x < \sqrt[3]{\ln^2 2} \\ \ln^2(e^{x\sqrt{x}} - 1) & \text{PER } x \geq \sqrt[3]{\ln^2 2} \end{cases}$$

IN TAL MODO $y(x)$ È SOL. DI CLASSE C^1 DELL'EQUAZIONE PER OGNI $x \geq 0$ E SODDISFA $y(1) = \ln^2(e-1)$.

(b) CONSIDERIAMO IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{xy - \frac{1}{2}}\, e^{x\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

E SIA $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE.

SI VERIFICA SUBITO CHE LA FUNZIONE COSTANTE UGUALE A 1 È UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA; QUINDI PER $x > 1$, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE, SI HA

$$y(x) > 1.$$

INOLTRE, GRAZIE AL T. DEL CONFRONTO, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE, PER $x > 1$, $y(x)$ È MAGGIORATA DALLA SOL. DEL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{xy}\, e^{x\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

CHE È DATA DA (3). DI CONSEGUENZA PER $x > 1$, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE SI HA

(4) $$1 < y(x) < x^3$$

SIAMO ORA IN GRADO DI DIMOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$. INFATTI SE PER ASSURDO COSÌ NON FOSSE, L'ESTREMO

SUPERIORE DELL'INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE SAREBBE $b<+\infty$
QUINDI $y(x)$ RISRETTA A $[1,b)$ NON SAREBBE PROLUNGABILE A DESTRA DI b. MA, GRAZIE A (4), IL GRAFICO DI $y(x)$ È CONTENUTO NEL COMPATTO

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le b,\ 1\le y\le x^3\}$$

QUINDI IL TEO. DI PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI GARANTISCE LA PROLUNGABILITÀ DI $y(x)$ OLTRE b.
QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE $b<+\infty$.
QUINDI $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.
MOSTRIAMO ORA CHE $y(x)\to+\infty$ PER $x\to+\infty$.
POICHÈ IL II° MEMBRO DELL'EQUAZIONE È POSITIVO, $y(x)$ È CRESCENTE, QUINDI SAPPIAMO CHE PER $x\to+\infty$ SI HA

(5) $$y(x)\longrightarrow \sup\{y(x)\mid x\ge 1\}=\ell\ge y(1)=1$$

SE PER ASSURDO FOSSE $\ell<+\infty$, ALLORA SI AVREBBE:

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x)=\lim_{x\to+\infty} 3\sqrt{xy-\frac{1}{2}}\; e^{x\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{y}}\ge$$
$$\ge \lim_{x\to+\infty} 3\sqrt{x\cdot 1-\frac{1}{2}}\; e^{x\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{\ell}}=+\infty$$

QUINDI $y'(x)\to+\infty$ PER $x\to+\infty$, PERCIÒ $\exists\, x_0\ge 1$ TALE CHE $y'(x)\ge 1$ PER $x\ge x_0$. DI CONSEGUENZA, $\forall x\ge x_0$ SI HA:

$$y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt\ge\int_{x_0}^{x} 1\,dt=x-x_0$$

QUINDI

$$y(x)\ge \left(y(x_0)+x-x_0\right)\longrightarrow+\infty \quad \text{PER } x\to+\infty$$

IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $\ell=\sup\{y(x)\mid x\ge 1\}<+\infty$.
QUINDI NELLA (5) DEVE ESSERE $\ell=+\infty$.

6 **(a)** SI OSSERVI CHE:

$$0 \leq \frac{x^6 y^6}{x^{10}+y^{14}} = \frac{|x^5|^{\frac{6}{5}} \cdot |y^7|^{\frac{6}{7}}}{|x^5|^2+|y^7|^2} =$$

LIMITATA PERCHÉ DELLA FORMA $\frac{u^\alpha \cdot v^\beta}{u^2+v^2}$ CON $\alpha+\beta=2$

$$= \boxed{\frac{|x^5|^{\frac{6}{5}} \cdot |y^7|^{\frac{4}{5}}}{|x^5|^2+|y^7|^2}} \cdot |y^7|^{\frac{6}{7}-\frac{4}{5}} \leq K \cdot |y|^{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{6}{7}-\frac{4}{5} = \frac{2}{35}$$

QUINDI:

$$0 \leq \frac{x^6 y^6}{x^{10}+y^{14}} \leq K \cdot |y|^{\frac{2}{5}} \to 0$$

QUINDI

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 y^6}{x^{10}+y^{14}} = 0$$

PER IL T. DEL CONFRONTO.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 y^6}{x^7+y^{14}}$ NON ESISTE.

INFATTI PRESO $\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0,\ x\geq 0\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma}} \frac{x^6 y^6}{x^7+y^{14}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x^7} = 0$$

INVECE PRESO $\Lambda = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=-y^2+y^7,\ y\geq 0\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Lambda}} \frac{x^6 y^6}{x^7+y^{14}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{(-y^2+y^7)^6 y^6}{(-y^2+y^7)^7+y^{14}} =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{y^{18} + o(y^{18})}{-y^{14} + 7y^{19} + o(y^{19}) + y^{14}} =$$

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{y^{18} + o(y^{18})}{7y^{19} + o(y^{19})} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{7y} = +\infty$$

CIÒ SIGNIFICA CHE SU RESTRIZIONI DIVERSE IL LIMITE ASSUME VALORI DIVERSI, COSA CHE NON POTREBBE SUCCEDERE SE IL LIMITE ESISTESSE.

QUINDI IL LIMITE NON ESISTE.