Analisi Matematica 2

Cognome: .... **A.A. 2020-2021**

Nome: .... **31 Agosto 2021**

---

1. Dato l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \cdot \ln\left(\frac{x^4+5x^2+6}{x^4+5x^2+4}\right)\, dx$,

(**a**) calcolarlo per $\alpha = 1$;

(**b**) studiarne la convergenza al variare di $\alpha > 0$.

2. Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot (f(n+10) - f(n))$ nei seguenti casi:

(**a**) $f(x) = \ln x$;

(**b**) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{1+t}\, dt$.

3. Studiare il carattere di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos g(x)}{\ln(3+x^2)}\, dx$ nei seguenti casi:

(**a**) $g(x) = x$;

(**b**) $g(x) = x + e^{-x}$.

4. Sia $y(x)$ la soluzione passante per l'origine di $y' = \left|1-y^2\right|^{1+|x|}$.

(**a**) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.

(**b**) Mostrare che $y(x)$ è dispari.

(**c**) [facoltativa] Dire, motivando la risposta, se $y(x) \to 1$ oppure no, per $x \to +\infty$.

5. Data l'equazione differenziale $y^{(5)} - y^{(4)} + 5y^{(3)} - 5y'' + 4y' - 4y = 10e^x$.

(**a**) Trovarne la soluzione generale.

(**b**) Trovarne tutte le eventuali soluzioni $y(x)$ tali che $y(x) = o\left(x^2 e^x\right)$ per $x \to -\infty$.

6. Data $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{|x|^\alpha y^3}{(x^4+y^8)(1+x^4+y^8)} & \text{altrimenti,} \end{cases}$ dire per quali $\alpha > 0$ si ha che:

(**a**) f è continua in $(0,0)$,

(**b**) f è differenziabile in $(0,0)$,

(**c**) f è infinitesima per $(x,y) \to \infty$.

Soluzioni $\boxed{1a}$

$\boxed{1}$ **(a)** SICCOME $f(x)$ È PARI, SI HA:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b 2x\ln\left(\frac{x^4+5x^2+6}{x^4+5x^2+4}\right)dx \overset{t=x^2}{=}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b^2}\ln\frac{t^2+5t+6}{t^2+5t+4}\,dt = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \ln\frac{(t+2)(t+3)}{(t+1)(t+4)}\,dt =$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\int_0^c \ln(t+2)+\ln(t+3)-\ln(t+1)-\ln(t+4)\,dt =$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\int_0^c (t+2)'\ln(t+2)+(t+3)'\ln(t+3)-(t+1)'\ln(t+1)-(t+4)'\ln(t+4)\,dt =$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\left(\Big[(t+2)\ln(t+2)+(t+3)\ln(t+3)-(t+1)\ln(t+1)-(t+4)\ln(t+4)\Big]_0^c - \int_0^c 1+1-1-1\,dt\right) =$$

$$=\lim_{c\to+\infty}\left[t\ln\left(\frac{(t+2)(t+3)}{(t+1)(t+4)}\right)+\ln\frac{(t+2)^2\cdot(t+3)^3}{(t+1)\cdot(t+4)^4}\right]_0^c - \int_0^c 0\,dt =$$

$$= -\ln\frac{2^2\cdot 3^3}{4^4} + \lim_{c\to+\infty}\left(c\ln\left(\frac{c^2+5c+6}{c^2+5c+4}\right)+\ln\left(\frac{c^5+o(c^5)}{c^5+o(c^5)}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \lim_{c\to+\infty}\left(c\cdot\ln\left(1+\frac{2}{c^2+5t+4}\right)+\ln\left(\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\right)\right) =$$

$$= 3\ln\frac{4}{3} + \lim_{c\to+\infty}\left(c\cdot\frac{2}{c^2+5c+4}+\ln\left(\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\right)\right) = 3\ln\frac{4}{3}+0+0 = \mathbf{3\ln\frac{4}{3}}$$

(b) VISTO CHE $f(x)$ È PARI, BASTA STUDIARE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

PER $x \to +\infty$ SI HA:

$$f(x) = |x|^\alpha \ln \frac{x^4+5x^2+6}{x^4+5x^2+4} = x^\alpha \cdot \ln\left(1+\frac{2}{x^4+5x^2+4}\right) \simeq \frac{x^\alpha}{x^4} = \frac{1}{x^{4-\alpha}}$$

QUINDI $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE SE E SOLO SE $4-\alpha>1$ CIOÈ $\alpha<3$.

MA VISTO CHE PER IPOTESI ERA $\alpha>0$, LA RISPOSTA È $\mathbf{0<\alpha<3}$.

$\boxed{2}$ **(a)** LA SERIE È DELLA FORMA $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ CON $a_n = \ln(n+10)-\ln n$.

MOSTRIAMO CHE $a_n \to 0$ DECRESCENDO. SI HA:

$$a_n = \ln(10+n)-\ln n = \ln\left(1+\frac{10}{n}\right) \to 0$$

INOLTRE a_n È DECRESCENTE PERCHÉ $\frac{10}{n}$ È DECRESCENTE MENTRE LA FUNZIONE $\ln$ È CRESCENTE.

QUINDI LA SERIE CONVERGE GRAZIE AL CRITERIO DI LEIBNIZ.

(b) ANCHE STAVOLTA LA SERIE CONVERGE GRAZIE AL CRITERIO DI LEIBNIZ, PERCHÉ $a_n \to 0$ DECRESCENDO. MOSTRIAMOLO:

$$a_n = \int_0^{n+10} \sin\frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^{n} \sin\frac{1}{1+t}\,dt = \int_n^{n+10} \sin\frac{1}{1+t}\,dt$$

QUINDI, PONENDO $g(t) = \sin\frac{1}{1+t}$ E OSSERVANDO CHE SU $[0,+\infty)$ $g(t)$ È DECRESCENTE, OTTENIAMO:

$$a_n - a_{n+1} = \int_n^{n+10} g(t)\,dt - \int_{n+1}^{n+11} g(t)\,dt = \int_n^{n+10} g(t)\,dt - \int_n^{n+10} g(t+1)\,dt =$$

PERCHÉ $g(t)$ È DECRESCENTE

$$= \int_n^{n+10} g(t)-g(t+1)\,dt \geq \int_n^{n+10} 0\,dt = 0$$

QUINDI $a_n \geq a_{n+1}$, CIOÈ È DECRESCENTE.

PER MOSTRARE CHE $a_n \to 0$ OSSERVIAMO CHE:

$$0 \leq a_n = \int_n^{n+10} g(t)\,dt \leq \int_n^{n+10} g(n)\,dt = 10\,g(n) = 10 \cdot \sin\frac{1}{1+n} \to 0$$

PERCHÉ $g(t)$ È DECRESCENTE

3 (a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln(3+x^2)}\,dx$ CONVERGE GRAZIE AL CRITERIO DEGLI INTEGRALI OSCILLANTI PERCHÉ $\cos x$ È PERIODICA A MEDIA NULLA MENTRE $\frac{1}{\ln(3+x^2)} \to 0$ DECRESCENDO PER $x \to +\infty$.

(b) GRAZIE AL FATTO CHE L'INTEGRALE DEL PUNTO (a) CONVERGE, L'INTEGRALE DA STUDIARE ORA HA LO STESSO CARATTERE DI:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\cos(x+e^{-x})}{\ln(3+x^2)} - \frac{\cos x}{\ln(3+x^2)} \right) dx$$

CHE CONVERGE GRAZIE AL CRITERIO DELLA ASSOLUTA CONVERGENZA PERCHÉ:

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(x+e^{-x})}{\ln(3+x^2)} - \frac{\cos x}{\ln(3+x^2)} \right| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(x+e^{-x})-\cos x|}{\ln(3+x^2)}\,dx =$$

CON $x < \eta_x < x+e^{-x}$ (T. DI LAGRANGE)

$$= \int_0^{+\infty} \frac{|-\sin(\eta_x)\cdot e^{-x}|}{\ln(3+x^2)}\,dx$$

CHE CONVERGE PER CONFRONTO CON $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ PERCHÉ:

$$0 \leq \frac{|-\sin(\eta_x)\, e^{-x}|}{\ln(3+x^2)} \leq \frac{e^{-x}}{\ln(3+x^2)} < e^{-x}.$$

4 (a) $F(x,y) = |1-y^2|^{1+|x|}$ SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ.

PER VERIFICARLO BASTA OSSERVARE CHE, PER OGNI FISSATO $x_0 \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE y DATA DA $F(x_0,y)$ È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$ ED È C^1 A TRATTI, CON LA DERIVATA CHE SULL'INTERVALLO $[-a, a]$ (CON $a>\sqrt{2}$) HA MASSIMO $2(1+|x|)\,a\,(a^2-1)^{|x|}$.

DA CIÒ SEGUE CHE, SE $\Omega = \{(x,y) \mid |x|<b,\ |y|<a\}$, CON $a>\sqrt{2}$, ALLORA:

$$\forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega \quad |F(x,y_1)-F(x,y_2)| < L\,|y_1-y_2|$$

DOVE $L = 2a(1+b)(a^2-1)^b$.

QUINDI $F(x,y)$ SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ SU TUTTO $\mathbb{R}^2$.

GRAZIE A CIÒ VALE IL T. DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE E, DI CONSEGUENZA, LA SOLUZIONE $Y(x)$ CHE SODDISFA $Y(0)=0$ NON PUÒ INTERSECARE LE 2 SOL. COSTANTI $Y\equiv 1$ E $Y\equiv -1$.

VEDI UNA QUALSIASI DEGLI SCRITTI SCORSI

DUNQUE, FINCHÉ $Y(x)$ ESISTE, RIMANE CONFINATA NELLA STRISCIA $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1<y<1\}$. QUESTO FATTO, COMBINATO NEL SOLITO MODO COL TEOREMA DI PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI, CI PERMETTE DI DIMOSTRARE LA PROLUNGABILITÀ A TUTTO $\mathbb{R}$ DI $Y(x)$.

(b) DOBBIAMO MOSTRARE CHE LA FUNZIONE $v(x)=-Y(-x)$ COINCIDE CON $Y(x)$.

A TALE SCOPO BASTA DIMOSTRARE CHE ANCHE $v(x)$ SODDISFA LO STESSO PROB. DI CAUCHY DI $Y(x)$ E POI INVOCARE IL T. DI UNICITÀ.

PER COMINCIARE IL DATO INIZIALE È:

$$v(0)=-Y(-0)=-Y(0)=-0=0$$

PER L'EQUAZIONE SI HA:

$$v'(x)=\left(-Y(-x)\right)'=-Y'(-x)\cdot(-1)=Y'(-x)=\left|1-\left(Y(-x)\right)^2\right|^{1+|-x|}=$$

$$=\left|1-\left(-Y(-x)\right)^2\right|^{1+|x|}=\left|1-\left(v(x)\right)^2\right|^{1+|x|}$$

QUINDI $v(x)$ SODDISFA ANCHE LA STESSA EQUAZIONE DI $Y(x)$ VISTO CHE:

$$v'=\left|1-v^2\right|^{1+|x|}$$

QUINDI, PER IL T. DI UNICITÀ $Y(x)$ E $v(x)$ SONO LA STESSA FUNZIONE, PERCIÒ PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ SI HA $Y(x)=v(x)=-Y(-x)$, OVVERO $Y(x)$ È DISPARI.

(c) POICHÉ $Y(x)$ È CRESCENTE E, PER $x>0$, COMPRESA TRA 0 E 1, IL SUO LIMITE ℓ PER $x\to+\infty$ ESISTE E SODDISFA $0<\ell\leq 1$. VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\ell\neq 1$.

SE $\sup\{Y(x) \mid x\in\mathbb{R}\}\leq 1-\frac{1}{60}$ AVREMO OVVIAMENTE CHE ANCHE $\ell\leq 1-\frac{1}{60}<1$, E QUINDI $\ell\neq 1$.

SE INVECE $\sup\{Y(x) \mid x\in\mathbb{R}\}>1-\frac{1}{60}$ ALLORA ESISTE $x_0>0$ T.C.

$y(x_0) = 1 - \frac{1}{60}$ E $1 - \frac{1}{60} < y(x) < 1$ PER $x > x_0$.

MA ALLORA, PER OGNI $x > x_0$ SI HA:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(1 - (y(t))^2\right)^{1+t} dt <$$

$$< 1 - \frac{1}{60} + \int_{x_0}^{x} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{60}\right)^2\right)^{1+t} dt < 1 - \frac{1}{60} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{30}\right)^{1+t} dt <$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{3600} < \frac{1}{30}$$

$$< 1 - \frac{1}{60} + \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{30}\right)^{1+t} dt = 1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{30} \cdot \frac{-1}{\ln \frac{1}{30}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{30 \ln 30} < 1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{90} = 1 - \frac{1}{180}$$

DUNQUE, DAL FATTO CHE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ SIA $y(x) < 1 - \frac{1}{180}$ SEGUE

CHE $\ell \leq 1 - \frac{1}{180} < 1$. IN OGNI CASO, QUINDI, $\ell \neq 1$.

5 (a) IL POLINOMIO CARATTERISTICO È

$$P(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 + 5\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4)$$

LE CUI RADICI SONO $\lambda = 1$, $\lambda = \pm i$, $\lambda = \pm 2i$, TUTTE CON MOLTEPLICITÀ 1,

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = A e^x + B \sin x + C \cos x + D \sin 2x + E \cos 2x + y_0(x)$$

CON $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ ED $y_0(x)$ DELLA FORMA $y_0(x) = a x e^x$, CON $a \in \mathbb{R}$

DA DETERMINARE.

TROVIAMO a. PER OGNI $k \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$y_0^{(k)}(x) = a \cdot (x + k) e^x$$

QUINDI, SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE, SI OTTIENE:

$$a(x+5)e^x - a(x+4)e^x + 5a(x+3)e^x - 5a(x+2)e^x + 4a(x+1)e^x + 4axe^x = 10e^x$$

CIOÈ:

$$a(1 + 5 + 4)e^x = 10e^x$$

DA CUI SEGUE $a = 1$, CIOÈ $y_0(x) = xe^x$.

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

(1) $$y(x) = Ae^x + B\sin x + C\cos x + D\sin 2x + E\cos 2x + xe^x$$

AL VARIARE DI A, B, C, D, E IN $\mathbb{R}$.

(b) LA (1) è $o(x^2e^x)$ PER $x \to -\infty$ SE E SOLO SE $B=C=D=E=0$

IL "SE" È OVVIO. PER IL "SOLO SE" BASTA OSSERVARE CHE SE B, C, D ED E NON SONO TUTTI NULLI ALLORA, PER $x \to -\infty$,

$$B\sin x + C\cos x + D\sin 2x + E\cos 2x \not\to 0$$

PERCHÉ È PERIODICA NON IDENTICAMENTE NULLA, QUINDI NON PUÒ ESSERE $o(x^2e^x)$, CHE INVECE È INFINITESIMO.

$\boxed{6}$ **(a)** È CONTINUA SE E SOLO SE $\alpha > \frac{5}{2}$.

INFATTI SE $\alpha = \frac{5}{2} + \delta$ CON $\delta > 0$, SI HA

LIMITATO PERCHÉ È DELLA FORMA $\frac{a^\alpha \cdot b^\beta}{a^2+b^2}$ CON $\alpha+\beta=2$

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|x|^{\frac{5}{2}+\delta} \cdot |y|^3}{(x^4+y^8)(1+x^4+y^8)} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+x^4+y^8}}}_{\text{LIMITATO}} \cdot \boxed{\frac{(x^2)^{\frac{5}{4}} \cdot (y^4)^{\frac{3}{4}}}{(x^2)^2+(y^4)^2}} \cdot \underbrace{|x|^\delta}_{\to 0}$$

QUINDI $f(x,y) \to 0$ PER IL T. DEL CONFRONTO.

INVECE, SE $\alpha \le \frac{5}{2}$, POSTO $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2, y > 0\}$, SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Lambda}} f(x,y) = \lim_{y\to 0^+} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{|y|^{3+2\alpha}}{2y^8\cdot(1+2y^8)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{1+2y^8} \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{2\alpha-5} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{SE } \alpha = \frac{5}{2} \\ +\infty & \text{SE } \alpha < \frac{5}{2} \end{cases}$$

QUINDI SE $\alpha \le \frac{5}{2}$ $f(x,y) \not\to 0$.

(b) È DIFFERENZIABILE SE E SOLO SE $\alpha > 3$. MOSTRIAMOLO.

VISTO CHE $f(x,y)$ È IDENTICAMENTE NULLA SUGLI ASSI, SI HA CHE

$$f(0,0) = 0 = f_x(0,0) = f_y(0,0)$$

QUINDI

$$\left(f \text{ È DIFFERENZIABILE IN } (0,0)\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\right)$$

MA TALE LIMITE VALE 0 SE E SOLO SE $\alpha > 3$.

INFATTI SE $\alpha = 3+\delta$ CON $\delta > 0$ SI HA:

$$0 \le \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{1}{1+x^4+y^8}} \cdot \underbrace{\frac{(x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (y^4)^{\frac{1}{2}}}{(x^2)^2+(y^4)^2}} \cdot \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}} \cdot \underbrace{|y|^{\delta}}_{\to 0}$$

LIMITATI

QUINDI IL NOSTRO LIMITE VALE 0 PER IL T. DEL CONFRONTO.

INVECE, SE $\alpha \le 3$, E Λ È COME AL PUNTO **(a)**, SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Lambda}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{3+2\alpha}}{2y^8\cdot(1+2y^8)\sqrt{y^4+y^2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{2\alpha-6}}{2\cdot(1+2y^8)\sqrt{y^2+1}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{SE } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{SE } \alpha < 3 \end{cases}$$

QUINDI, SE $\alpha \le 3$ IL NOSTRO LIMITE NON PUÒ VALERE 0.

(c) È INFINITESIMA PER $(x,y)\to\infty$ SE E SOLO SE $0 < \alpha < \frac{13}{2}$. VERIFICHIAMOLO.

SE $\alpha \ge \frac{13}{2}$ E Λ È COME NEL PUNTO **(a)** SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty\\(x,y)\in\Lambda}} f(x,y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{3+2\alpha}}{2y^8\cdot(1+2y^8)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2y^8}+1}\cdot\frac{y^{2\alpha-13}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{SE } \alpha = \frac{13}{2} \\ +\infty & \text{SE } \alpha > \frac{13}{2} \end{cases}$$

SE INVECE $0 < \alpha < \frac{13}{2}$ SI HA:

$$0 \le |f(x,y)| = \underbrace{\frac{x^4+y^8}{1+x^4+y^8}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^8}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{y^4}{\sqrt{x^4+y^8}}\right)^{\frac{3}{4}}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+y^8}}\right)^{4-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}}_{\to 0}$$

PERCHÉ, SE $\alpha < \frac{13}{2}$, ALLORA:

$$4-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4} = \frac{13-2\alpha}{4} > 0$$

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} |f(x,y)| = 0.$$