INTEGRALE DI RIEMANN - SIM 1

27-03-2021

Quesito 1

CALCOLARE

a) $$\int_3^{2\sqrt{3}} \frac{256}{x^5-24x^3+128x}\,dx$$

b) $$\int_0^{\pi} x^{14}\cdot(x^2+15)\cdot\cos 4x\,dx$$

Quesito 2

SIANO $f, F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ DEFINITE DA

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } -1 \le x \le 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{SE } 0 < x \le 1 \end{cases} \quad \text{E} \quad F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$$

CALCOLARE, SE ESISTE $F'(0)$.

(ATTENZIONE: <u>NON</u> SI PUÒ APPLICARE IL T.F.C.I. PERCHÉ f NON È CONTINUA)

Quesito 3

SIA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LIMITATA E TALE CHE $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$ SI HA $f \in \mathcal{R}([a,b])$. SI SUPPONGA INOLTRE CHE $\forall x \in \mathbb{R}$ SI ABBIA $\int_x^{x+1} f(t)\,dt = 2$. MOSTRARE CHE:

a) SE f È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$ ALLORA È PERIODICA

b) SE f È CONTINUA SU $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ E $x=0$ È UN PUNTO DI SALTO ALLORA OGNI $x \in \mathbb{Z}$ È UN PUNTO DI SALTO.

SOLUZIONI

Quesito 1

a

$$\int_3^{2\sqrt{3}} \frac{256}{x^5-24x^3+128x}\,dx = \int_3^{2\sqrt{3}} \frac{256}{x(x^2-8)(x^2-16)}\,dx =$$

$(x^2-8)'$

$Y=(x^2-8)$

$$= \int_3^{2\sqrt{3}} \frac{128\cdot \boxed{2x}}{x^2(x^2-8)\cdot(x^2-16)}\,dx =$$

$(Y^2)'$

$$= \int_1^4 \frac{128}{(Y+8)\,Y\,(Y-8)}\,dY = \int_1^4 \frac{64\cdot \boxed{2Y}}{Y^2(Y^2-64)}\,dY =$$

$$\frac{64}{u(u-64)} = \frac{64-u+u}{u(u-64)} = -\frac{1}{u}+\frac{1}{u-64}$$

$$= \int_1^{16} \frac{64}{u\cdot(u-64)}\,du =$$

$$= \int_1^{16} \frac{1}{u-64} - \frac{1}{u}\,du = \Big[\ln(64-u) - \ln u\Big]_1^{16} =$$

$$= \ln 48 - \ln 16 - \ln 63 = \ln\frac{48}{16\cdot 63} = \ln\frac{1}{21} = \boxed{-\ln 21}$$

b

$$\int_0^{\pi} x^{14}\cdot(x^2+15)\cdot\cos 4x\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi} x^{16}\cos 4x\,dx}_{A} + \underbrace{\int_0^{\pi} 15x^{14}\cos 4x\,dx}_{B}$$

$$(A) = \int_0^{\pi} x^{16} \cdot \left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)' dx = \left[\frac{1}{4}x^{16}\sin 4x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4x^{15}\sin 4x\, dx =$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} x^{15}\cdot(\cos 4x)'\, dx = \left[x^{15}\cos 4x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 15x^{14}\cos 4x\, dx =$$

$$= \pi^{15} - (B)$$

QUINDI $(A) + (B) = \pi^{15}$

PERCHÉ $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^{h^2} \sin\frac{1}{x}\, dx = 0$

IN QUANTO:

$$0 \leq \left|\frac{1}{h}\int_0^{h^2} \sin\frac{1}{x}\, dx\right| \leq \frac{1}{h}\int_0^{h^2} 1\, dx \leq h$$

Quesito 2

SI HA:

$$F'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = 0$$

$$F'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^{h} \sin\frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\int_0^{h^2} \sin\frac{1}{x}\, dx + \int_{h^2}^{h} \sin\frac{1}{x}\, dx\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{h^2}^{h} \sin\frac{1}{x}\, dx =$$

È STATO NECESSARIO FARE IN MODO CHE IL PRIMO ESTREMO NON FOSSE 0 PERCHÉ ALTRIMENTI L'INTEGRANDA NON ERA ABBASTANZA REGOLARE DA INTEGRARE PER PARTI

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{h^2}^{h} x^2\cdot\left(\cos\frac{1}{x}\right)' dx =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left(\left[x^2 \cos \frac{1}{x} \right]_{h^2}^{h} - \int_{h^2}^{h} 2x \cos \frac{1}{x} \, dx \right) =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left(\underbrace{\boxed{h \cos \frac{1}{h}}}_{\to 0} - \underbrace{\boxed{h^3 \cos \frac{1}{h^2}}}_{\to 0} - \underbrace{\boxed{\frac{1}{h} \int_{h^2}^{h} 2x \cos \frac{1}{x} \, dx}}_{\to 0} \right) = 0$$

PERCHÉ:

$$0 \leq \left| \frac{1}{h} \int_{h^2}^{h} 2x \cdot \cos \frac{1}{x} \, dx \right| \leq \frac{1}{h} \cdot \int_{h^2}^{h} 2x \cdot \left| \cos \frac{1}{x} \right| dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_{h^2}^{h} 2x \cdot dx = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{h^2}^{h} \leq \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}$$

QUINDI:

$$0 \leq \left| \frac{1}{h} \int_{h^2}^{h} 2x \cos \frac{1}{x} \, dx \right| \leq \frac{1}{2} h$$

DA CUI SEGUE:

$$\frac{1}{h} \int_{h^2}^{h} 2x \cos \frac{1}{x} \, dx \to 0$$

QUINDI $F'(0) = 0$.

Quesito 3

PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ DEFINIAMO:

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

SI NOTI CHE $\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA

$$F(x+1) = \int_0^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+1} f(t)\,dt = F(x) + 2$$

ORA, $\forall x \in \mathbb{R}$, SE f È CONTINUA SIA IN x CHE IN $x+1$, SI HA:

$$f(x+1) = F'(x+1) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+1+h) - F(x+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) + 2 - F(x) - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$$

QUINDI SE f È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$ ALLORA È PERIODICA CON PERIODO 1.

SE INVECE f È CONTINUA IN $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ED HA UN SALTO PER $x = 0$, ALLORA $\forall n \in \mathbb{Z}$ SI HA:

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(n+t) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$$

E

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(n+t) = \lim_{t \to 0^-} f(t)$$

PERCHÈ, PROCEDENDO COME NEL PUNTO $\boxed{a}$, SI TROVA CHE SE $x \notin \mathbb{Z}$ ED $n \in \mathbb{Z}$ ALLORA: $f(x+n) = f(x)$

QUINDI PER $x = n$ C'È UN SALTO IDENTICO A QUELLO PER $x = 0$.