INTEGRALI IMPROPRI - SIM 2

02-04-2021

Quesito 1

STUDIARE IL CARATTERE DI:

a $$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\arctan\left(e^{\frac{1}{x^2}} + \cos\frac{\sqrt{2}}{x} - 2\right)}{x\sqrt{x}\cdot\left(\ln^2 x - \ln^2 \pi\right)} \right|^{\alpha} dx$$ AL VARIARE DI $\alpha > 0$

b $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2 + \sqrt{x} + \sin(Ax)}\, dx$$ AL VARIARE DI $A > 0$

c $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}}\, dx$$

Quesito 2

DATA $f \in C([1, +\infty))$ TALE CHE $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ CONVERGE, DIMOSTRARE O CONFUTARE LE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

a $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ CONVERGE

b SE $f(x) \geq 0$ E $f(x) \to 0$ PER $x \to +\infty$ ALLORA $\int_1^{+\infty} (f(x))^2\, dx$ CONVERGE.

c SE $f(x) \geq 0$ ALLORA $\int_1^{+\infty} (f(x))^2\, dx$ CONVERGE.

d SE $f(x) \to 0$ PER $x \to +\infty$ ALLORA $\int_1^{+\infty} (f(x))^3\, dx$ CONVERGE.

SOLUZIONI

Quesito 1

a LA FUNZIONE INTEGRANDA È $f(x) = |g(x)|^{\alpha}$ DOVE:

$$g(x) = \frac{\arctan\left(e^{\frac{1}{x^2}} + \cos\frac{\sqrt{2}}{x} - 2\right)}{x\sqrt{x}\cdot\left(\ln^2 x - \ln^2 \pi\right)}$$

PER COMODITÀ DI CALCOLO PONIAMO:

$$h(t) = e^{t^2} + \cos(\sqrt{2}\cdot t) - 2$$

CON QUALCHE CALCOLO SI TROVA CHE $h(0) = h'(0) = 0$ E

$$h''(t) = 2e^{t^2} + 4t^2e^{t^2} - 2\cos(\sqrt{2}\cdot t) =$$

$$= 4t^2e^{t^2} + 2\left(e^{t^2} - \cos(\sqrt{2}\cdot t)\right) \geq 4t^2e^{t^2} > 0 \quad \text{PER } t \neq 0$$

DA CUI SI DEDUCE CHE $h(t) > 0$ PER $t \neq 0$ E QUINDI CHE IL NUMERATORE DI $g(x)$ È SEMPRE POSITIVO.

INVECE IL DENOMINATORE DI $g(x)$ SI ANNULLA PER $x = 0, \frac{1}{\pi}, \pi$.

OTTENIAMO:

$$f(x) \approx \frac{C}{x^{\frac{3}{2}\alpha}|\ln x|^{2\alpha}} \quad \text{PER } x \to 0^+$$

$$f(x) \approx C\cdot\left|x - \frac{1}{\pi}\right|^{-\alpha} \quad \text{PER } x \to \frac{1}{\pi}^{\pm}$$

$$f(x) \approx C\cdot|x - \pi|^{-\alpha} \quad \text{PER } x \to \pi^{\pm}$$

$$e^{t^2} + \cos(\sqrt{2}\cdot t) - 2 =$$
$$= 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + O(t^6) + 1 - t^2 + \frac{1}{6}t^4 + O(t^6) - 2 =$$
$$= \frac{2}{3}t^4 + O(t^6) \approx \frac{2}{3}t^4$$

$$f(x) \approx \frac{C}{x^{\frac{11}{2}\alpha}\cdot(\ln x)^{2\alpha}} \quad \text{PER } x \to +\infty$$

QUINDI: $\int_0^{\frac{1}{4}} f(x)\,dx$ CONVERGE PER $\alpha \le \frac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{\pi}} f(x)\,dx \\ \int_{\frac{1}{\pi}}^{1} f(x)\,dx \\ \int_{1}^{\pi} f(x)\,dx \\ \int_{\pi}^{4} f(x)\,dx \end{array}\right\}$$ CONVERGONO PER $\alpha < 1$

$\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE PER $\alpha > \frac{2}{11}$

QUINDI CONVERGONO TUTTI SE E SOLO SE $\frac{2}{11} < \alpha \le \frac{2}{3}$.

$\boxed{b}$ NON SI PUÒ APPLICARE IL CRITERIO PER GLI INTEGRALI OSCILLANTI PERCHÉ $2+\sqrt{x}+\sin(Ax)$ NON È CRESCENTE. NOTIAMO PERÒ CHE SE INVECE AVESSIMO:

(1) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2+\sqrt{x}}\,dx$$

IL CRITERIO SI POTREBBE APPLICARE. DI CONSEGUENZA (1) CONVERGE.

MA ALLORA IL CARATTERE DEL NOSTRO INTEGRALE COINCIDE CON QUELLO DI:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2+\sqrt{x}+\sin(Ax)} - \frac{\sin x}{2+\sqrt{x}}\, dx$$

CIOÈ:

(2) $$\int_0^{+\infty} \frac{-\sin x \cdot \sin(Ax)}{(2+\sqrt{x})^2+(2+\sqrt{x})\sin(Ax)}\, dx$$

DISTINGUIAMO ORA 2 CASI: $A=1$ E $A\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

IL SECONDO CASO È PIÙ SEMPLICE PERCHÉ LA FUNZIONE

$$g(x) = -\sin x \cdot \sin(Ax)$$

RISULTA ESSERE SOMMA DI 2 FUNZIONI PERIODICHE A MEDIA NULLA:

$$g(x) = -\sin x \cdot \sin(Ax) = \frac{1}{2}\cos((1+A)x) - \frac{1}{2}\cos((1-A)x)$$

QUINDI, GRAZIE AL CRITERIO DEGLI INTEGRALI OSCILLANTI, POSSO DIRE CHE:

$$\int_0^{+\infty} \frac{-\sin x \cdot \sin(Ax)}{(2+\sqrt{x})^2}\, dx \quad \text{CONVERGE}$$

E QUINDI (2) HA LO STESSO CARATTERE DI:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{-\sin x \cdot \sin(Ax)}{(2+\sqrt{x})^2+(2+\sqrt{x})\sin(Ax)} + \frac{\sin x \cdot \sin(Ax)}{(2+\sqrt{x})^2} \right) dx$$

CIOÈ DI:

(3) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \sin^2(Ax)}{(2+\sqrt{x})^3+(2+\sqrt{x})^2\sin(Ax)}\, dx$$

CHE CONVERGE PERCHÉ, PER $x>0$, SI HA:

$$\left| \frac{\sin x \cdot \sin^2(Ax)}{(2+\sqrt{x})^3+(2+\sqrt{x})^2\sin(Ax)} \right| \le \frac{1}{(2+\sqrt{x})^3-(2+\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{1}{(2+\sqrt{x})^2\cdot(1+\sqrt{x})} \le \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}}$$

QUINDI, DALLA CONVERGENZA DI $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}}\,dx$, SEGUE QUELLA DI (3) APPLICANDO PRIMA IL CRITERIO DEL CONFRONTO E POI QUELLO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA.

QUESTO DIMOSTRA CHE PER $A \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ L'INTEGRALE ASSEGNATO CONVERGE.

RIMANE DA STUDIARE IL CASO $A=1$, NEL QUAL CASO MOSTREREMO CHE DIVERGE.

IN TAL CASO (2) DIVENTA:

$$(4) \qquad -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(2+\sqrt{x})(2+\sqrt{x}+\sin x)}\,dx$$

DOVE STAVOLTA IL SEGNO DELL'INTEGRANDA RIMANE COSTANTE. INOLTRE VALGONO LE STIME

$$\frac{\sin^2 x}{(2+\sqrt{x})(2+\sqrt{x}+\sin x)} > \frac{\sin^2 x}{(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} > \frac{\sin^2 x}{(3+\sqrt{x})^2} \geq 0$$

GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO, PER MOSTRARE CHE (4) DIVERGE BASTERÀ MOSTRARE CHE DIVERGE:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(3+\sqrt{x})^2}\,dx$$

A TALE SCOPO BASTA OSSERVARE CHE $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, QUINDI:

$$(5) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(3+\sqrt{x})^2}\,dx = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(3+\sqrt{x})^2}\,dx}_{\substack{\text{DIVERGE PERCHÉ} \\ \frac{1}{2(3+\sqrt{x})^2} \approx \frac{1}{2x} \\ \text{PER } x \to +\infty}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2(3+\sqrt{x})^2}\,dx}_{\substack{\text{CONVERGE} \\ \text{PER IL CRIT. DEGLI} \\ \text{INTEGRALI OSCILLANTI}}}$$

QUINDI (5) DIVERGE.

$\boxed{C}$ SPEZZIAMO L'INTEGRALE RICHIESTO:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{\sin\left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}}\,dx}_{A} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}}\,dx}_{B}$$

LA CONVERGENZA DI A È IMMEDIATA PERCHÈ:

$$\left| \frac{\sin\left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

QUINDI BASTA OSSERVARE CHE

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{CONVERGE}$$

E POI APPLICARE PRIMA IL CRITERIO DEL CONFRONTO POI QUELLO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA.

PER B INVECE SI OSSERVI CHE PER $x \to +\infty$ SI HA:

T. DI LAGRRANGE APPLICATO ALLA FUNZIONE $\sin t$ NELL'INTERVALLO: $\left[x^2+x+\frac{1}{2},\ x^2+x+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$$\sin\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right) = \sin\left(x^2+x+\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

TAYLOR APPLICATO A $e^{\frac{1}{x}}$ PER $x \to +\infty$

$$= \sin\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) + \cos(\xi_x)\cdot O\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \sin\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

QUINDI:

$$B = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}} + \frac{O\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \right) dx$$

MA, SICCOME $\int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$ CONVERGE, (B) HA LO STESSO CARATTERE DI:

$x = \sqrt{t-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^{c} \frac{\sin\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \int_{\frac{5}{2}}^{\left(c+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \frac{\sin t}{2\cdot\sqrt{\sqrt{t-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{t-\frac{1}{4}}}\, dt =$$

$$= \int_{\frac{5}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{2\cdot\sqrt{\sqrt{t-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{t-\frac{1}{4}}}\, dt$$

MA L'ULTIMO INTEGRALE CONVERGE PER IL CRITERIO DELL'INTEGRALE OSCILLANTE PERCHÈ $\sin t$ È PERIODICA A MEDIA NULLA E

$$2\sqrt{\sqrt{t-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{t-\frac{1}{4}} \to +\infty \text{ CRESCENDO}$$

PER $x \to +\infty$.

Quesito 2

a L'AFFERMAZIONE È VERA.

INFATTI, POSTO:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$$

GRAZIE ALL'IPOTESI CHE

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ CONVERGE}$$

ABBIAMO CHE:

(5) $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ ESISTE FINITO ED $F(x)$ È LIMITATA

DI CONSEGUENZA:

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx = \lim_{C\to+\infty} \int_1^C \frac{1}{x}\left(F(x)\right)'\,dx =$$

COMVERGE PERCHÉ, ESSENDO F(x) LIMITATA, SI HA $\left|\frac{F(x)}{x^2}\right| \leq \frac{k}{x^2}$ E $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CONVERGE

$$= \lim_{C\to+\infty} \left(\left[\frac{F(x)}{x}\right]_1^C + \int_1^C \frac{F(x)}{x^2}\,dx \right) =$$

$$= \lim_{C\to+\infty} \left(\boxed{\frac{F(C)}{C}} + \frac{F(1)}{1} + \int_1^C \frac{F(x)}{x^2}\,dx \right) =$$

PERCHÉ F(x) È LIMITATA

$$= 0 + F(1) + \int_1^{+\infty} \frac{F(x)}{x^2}\,dx = \lambda \in \mathbb{R}$$

QUINDI $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ CONVERGE

b L'AFFERMAZIONE È VERA. SICCOME $f(x)$ È POSITIVA E INFINITESIMA PER $x \to +\infty$, ESISTE $x_0 \geq 0$ T.C. PER $x \geq x_0$ SI HA:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

DI CONSEGUENZA, PER TALI x SI HA:

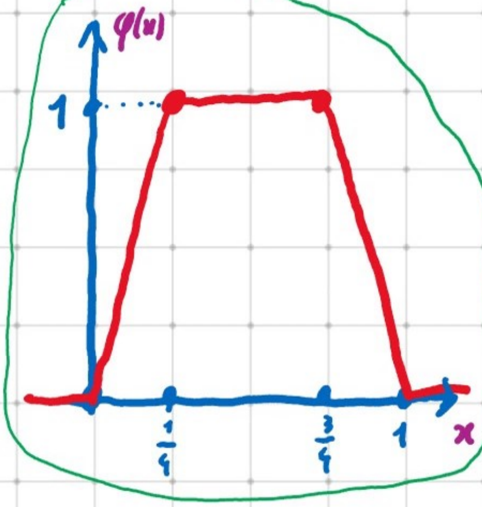
$$0 \leq (f(x))^2 \leq f(x)$$

QUINDI LA CONVERGENZA DI $\int_{x_0}^{+\infty} (f(x))^2\,dx$ SEGUE DA QUELLA DI $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ E DAL CRIT. DEL CONFRONTO.

C L'AFFERMAZIONE È FALSA.

PER DIMOSTRARLO ESIBIAMO UNA FUNZIONE $f(x) > 0$ TALE CHE $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE MA $\int_1^{+\infty} (f(x))^2\,dx$ DIVERGE.

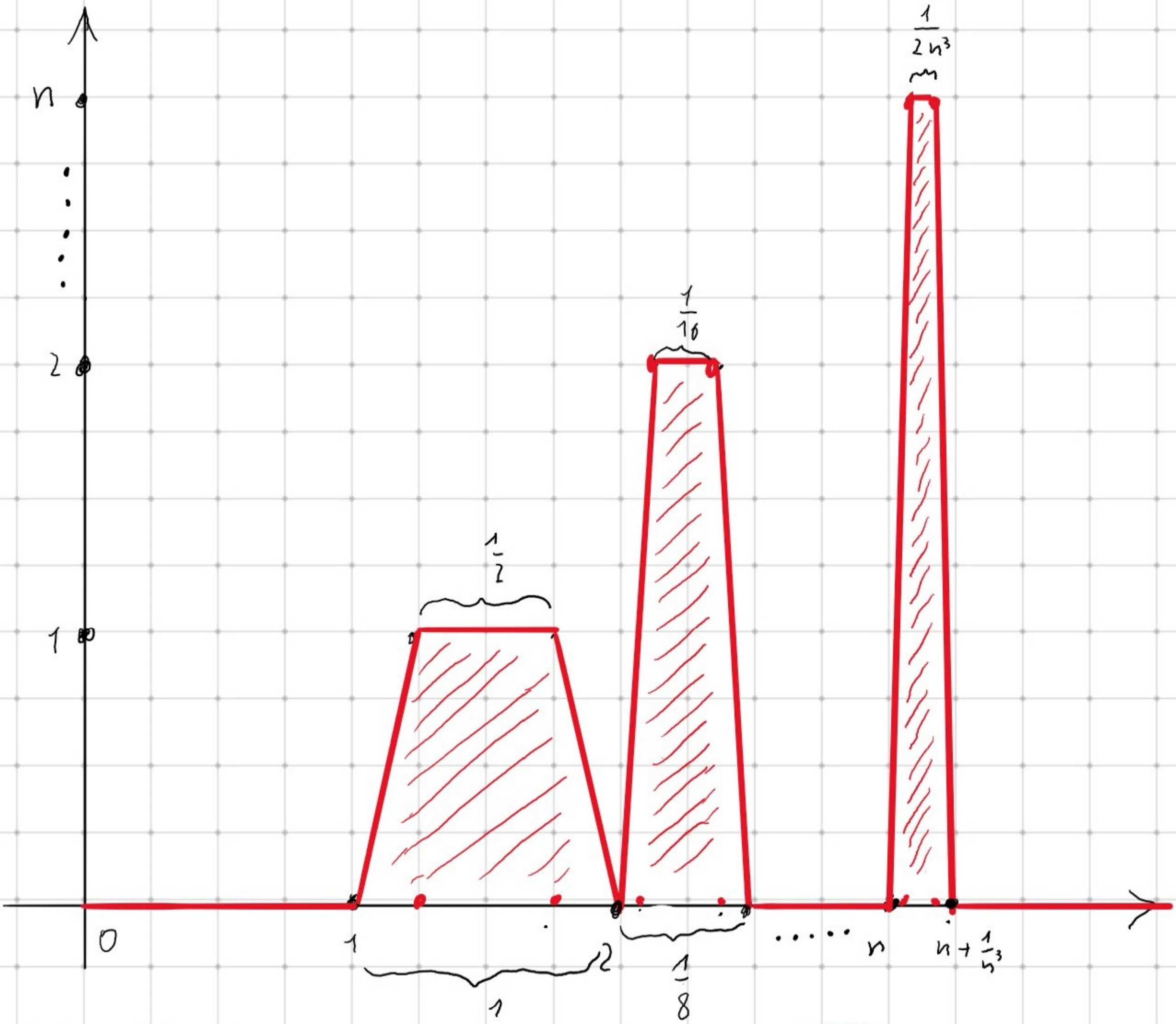
A TALE SCOPO SIA $\varphi(x)$ COME IN FIGURA



A PARTIRE DA $\varphi(x)$ DEFINIAMO $f(x)$ NEL MODO SEGUENTE:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in[n,n+1)\quad f(x)=n\,\varphi\left(n^3(x-n)\right)$$

IL CUI GRAFICO È



SI NOTICHE:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} f(x)\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} n\,\varphi\left(n^3(x-n)\right)dx \overset{x=\frac{t}{n^3}+n}{=} \int_0^1 \frac{1}{n^2}\varphi(t)\,dt = \frac{3}{4n^2}$$

MENTRE

$$\int_n^{n+1} (f(x))^2\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} (f(x))^2\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} n^2\cdot\left(\varphi\left(n^3(x-n)\right)\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{n}(\varphi(t))^2\,dt \geq \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 1\,dt = \frac{1}{2n}$$

DI CONSEGUENZA:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n^2}\right) = \boxed{\text{ESISTE FINITO}}$$

MENTRE:

$$\int_1^{+\infty} (f(x))^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} (f(x))^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{K=1}^{n} \int_k^{k+1} (f(x))^2\,dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

$\boxed{d}$ L'AFFERMAZIONE È FALSA.

PRESA $\varphi(x)$ COME NEL PUNTO $\boxed{C}$ DEFINIAMO

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{PER } x\in[0,6] \\ \frac{1}{\ln n}\,\varphi(\sqrt{n}(x-2n)) & \text{PER } x\in[2n,2n+1] \\ -\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln n}\,\varphi(x-2n-1) & \text{PER } x\in[2n+1,2n+2] \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} n\in\mathbb{N} \\ n\geq 3 \end{matrix}}$$

PER $n\geq 3$ SI HA:

$$\int_{2n}^{2n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{\ln n} \int_{2n}^{2n+1} \varphi(\sqrt{n}(x-2n))\,dx \overset{x=\frac{t}{\sqrt{n}}+2n}{=} \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln n} \int_0^{\sqrt{n}} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln n} \int_0^1 \varphi(t)\,dt = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{n}\cdot\ln n}$$

E

$$\int_{2n+1}^{2n+2} f(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln n} \int_{2n+1}^{2n+2} \varphi(x-2n-1)\,dx \overset{x=t+2n+1}{=} -\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln n} \int_0^1 \varphi(t)\,dt = -\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{n}\ln n}$$

DI CONSEGUENZA, RICORDANDO CHE $f(x)\ge 0$ SU $[2n,2n+1)$ E $f(x)\le 0$ SU $[2n+1,2n+2)$, SI OTTIENE

(6) $$\int_{2n}^{2n+2} f(x)\,dx = 0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

E

(7) $$0\le \int_{2n}^{c} f(x)\,dx \le \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{n}\,\ln n} < \frac{1}{n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}-\{0\}\ \ \forall c\in[2n,2n+2)$$

COMBINANDO (6) E (7) SI OTTIENE

$$0\le \int_{0}^{c} f(x)\,dx < \frac{1}{n} \qquad \text{PER } x>2n$$

DA CUI SEGUE:

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{0}^{c} f(x)\,dx = 0$$

INVECE, PER $(f(x))^3$, CON CALCOLI IDENTICI SI OTTIENE:

$$\int_{2n}^{2n+1}(f(x))^3\,dx = \dots = \frac{1}{(\ln n)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{0}^{1}(\varphi(t))^3\,dt \ge \frac{1}{\sqrt{n}\cdot(\ln n)^3}\cdot\int_{\frac14}^{\frac34} 1\,dx = \frac{1}{2\sqrt{n}\cdot(\ln n)^3} > \frac{1}{2n}$$

DEFINITIVAMENTE IN n

$$\int_{2n+1}^{2n+2}(f(x))^3\,dx = \dots = -\frac{1}{(\sqrt{n}\cdot\ln n)^3}\int_{0}^{1}(\varphi(t))^3\,dt \ge -\frac{1}{n\sqrt{n}(\ln n)^3} > -\frac{1}{3n}$$

DA CUI SEGUE:

$$\int_{2n}^{2n+2}(f(x))^3\,dx > \frac{1}{2n}-\frac{1}{3n} = \frac{1}{6n}$$

E QUINDI ANCHE:

$$\int_{0}^{2n+2}(f(x))^3\,dx = \int_{6}^{2n+2}(f(x))^3\,dx = \sum_{k=3}^{n}\int_{2k}^{2k+2}(f(x))^3\,dx > \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{6n} = \frac{1}{6}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}$$

DI CONSEGUENZA:

(8) $$\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{2n+2}(f(x))^3\,dx = +\infty$$

INOLTRE, SICCOME $|f^3(x)| \leq 1$, $\forall x \in [2n, 2n+2]$ SI HA

(9) $$\left| \int_{2n}^{c} f^3(x)\, dx \right| \leq 2$$

COMBINANDO (8) E (9) SI OTTIENE

$$\lim_{c \to +\infty} \int_0^c f^3(x)\, dx = +\infty$$

CIOÈ

$$\int_0^{+\infty} f^3(x)\, dx \quad \text{DIVERGE}$$

INFINE È IMMEDIATO VERIFICARE CHE $f(x) \to 0$ PER $x \to +\infty$.

RIASSUMENDO: $f(x)$ È UNA FUNZIONE INFINITESIMA PER $x \to +\infty$, CONTINUA SU $[0, +\infty)$ E TALE CHE $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ CONVERGE MA $\int_0^{+\infty} (f(x))^3 dx$ DIVERGE. QUINDI FA DA CONTROESEMPIO ALL'AFFERMAZIONE $\boxed{d}$.