Eq. a Variabili Separabili Sim 3

1 ora (parte standard) + 2 ore (parte facoltativa)

---

1 DATO IL PR. DI CAUCHY
$$\begin{cases} y' = \left(\dfrac{y^2 - y}{x^2 - x} \right)^m \\ y(2) = y_0 \end{cases}$$

a NEL CASO $m = 1$, TROVARE LE SOLUZIONI CON DATI INIZIALI $y_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{2}$.

b NEL CASO $m = 3$ DIRE SE LA SOLUZIONE CON DATO INIZIALE $y_0 = \frac{1}{2}$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

FACOLTATIVO **c** NEL CASO $m = 3$ STABILIRE PER QUALI DATI INIZIALI y_0 LA SOLUZIONE È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

---

2 DATO IL PR. DI CAUCHY
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 - e^y}{e^y} \cdot \left(\dfrac{1}{1 + x^2} \right)^\alpha \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a NEL CASO $\alpha = 1$ TROVARE LE SOLUZIONI CON DATI INIZIALI $y_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0 = -1$.

b NEL CASO $\alpha = \frac{1}{3}$ MOSTRARE CHE LA SOLUZIONE CON DATO INIZIALE $y_0 = 1$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$

FACOLTATIVO **c** DETTA $y(x)$ LA SOLUZIONE DEL PUNTO **b**, MOSTRARE CHE $y(x) \to 0$ PER $x \to +\infty$ E STIMARNE L'ORDINE DI INFINITESIMO.

Soluzioni

1 **a** PER $m=1$ IL P. DI CAUCHY DIVENTA:

(1)
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-y}{x^2-x} \\ y(2) = y_0 \end{cases}$$

L'APERTO DI $\mathbb{R}^2$ CHE CONTIENE I GRAFICI DELLE SOL. RICHIESTE È:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1\}$$

PERCHÈ L'EQUAZIONE NON È DEFINITA PER $x=0$ E $x=1$ E, SICCOME IL DATO INIZIALE VIENE DATO PER $x_0=2$, DELLE TRE REGIONI $x<0$, $0<x<1$ E $x>1$ PRENDIAMO LA TERZA.

LE SOLUZIONI CHE TROVEREMO SONO

PER $y_0=0$, $y(x)\equiv 0$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$

PER $y_0=1$, $y(x)\equiv 1$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$

PER $y_0=2$, $y(x)=x$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$

PER $y_0=\frac{1}{2}$, $y(x)=\dfrac{x}{3x-2}$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$

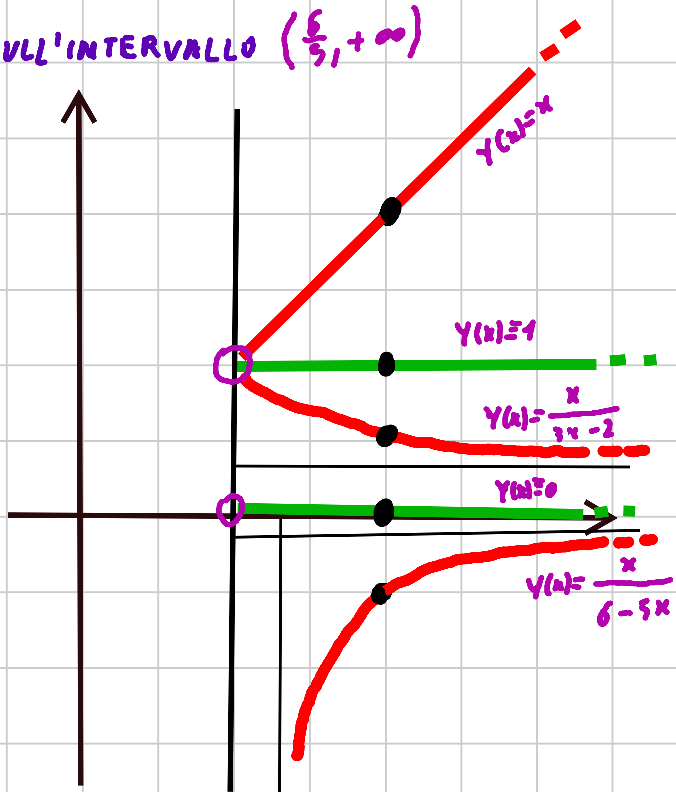
PER $y_0=-\frac{1}{2}$, $y(x)=\dfrac{x}{6-5x}$ SULL'INTERVALLO $(\frac{6}{5},+\infty)$

NELLA FIGURA A FIANCO SONO RAFFIGURATI I LORO GRAFICI.

QUELLE CON DATI INIZIALI $y_0=0$ E $y_0=1$ CORRISPONDONO ALLE SOL. COSTANTI.

LE ALTRE SI TROVANO SEPARANDO LE VARIABILI. SI HA:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)-y(x)} = \frac{1}{x^2-x}$$



INTEGRANDO IN AMBO I MEMBRI, NEL SECONDO SI OTTIENE:

$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c \overset{\text{PERCHÉ } x>1}{=} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+c$$

MENTRE NEL PRIMO SI HA:

$$\int \frac{y'(x)}{(y(x))^2-y(x)}\,dx \overset{y=y(x)}{=} \int \frac{1}{y^2-y}\,dy = \dots = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + c = \ln\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| + c$$

DA CUI SEGUE:

$$\ln\left|1-\frac{1}{y(x)}\right| = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$\left|1-\frac{1}{y(x)}\right| = e^c\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right) \qquad c\in\mathbb{R}$$

CIOÈ:

(2)
$$1-\frac{1}{y(x)} = k\left(1-\frac{1}{x}\right) \qquad k\in\mathbb{R}-\{0\}$$

SE $y(2)=2$ SI HA $1-\frac{1}{2} = k\left(1-\frac{1}{2}\right)$, CIOÈ $k=1$, E QUINDI (2) DIVENTA $y(x)=x$.

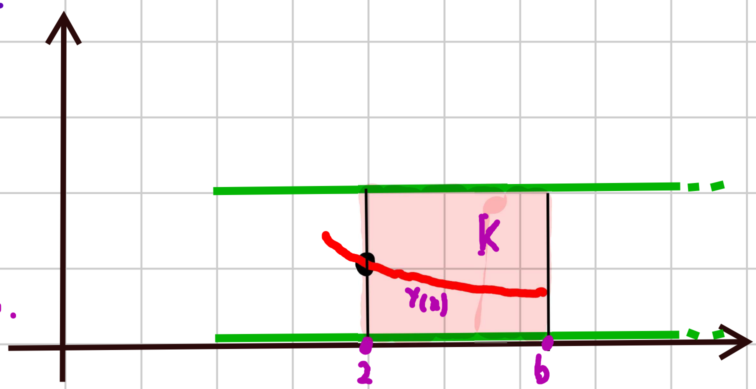
SE $y(2)=\frac{1}{2}$ SI HA $1-2 = k\left(1-\frac{1}{2}\right)$, CIOÈ $k=-2$, E QUINDI (2) DIVENTA $y(x)=\frac{x}{3x-2}$.

SE $y(2)=-\frac{1}{2}$ SI HA $1+2 = k\left(1-\frac{1}{2}\right)$, CIOÈ $k=6$, E QUINDI (2) DIVENTA $y(x)=\frac{x}{6-5x}$.

$\boxed{b}$ PER $m=3$ IL P. DI CAUCHY DIVENTA

(3)
$$\begin{cases} y' = \left(\dfrac{y^2-y}{x^2-x}\right)^3 \\ y(2)=y_0 \end{cases}$$

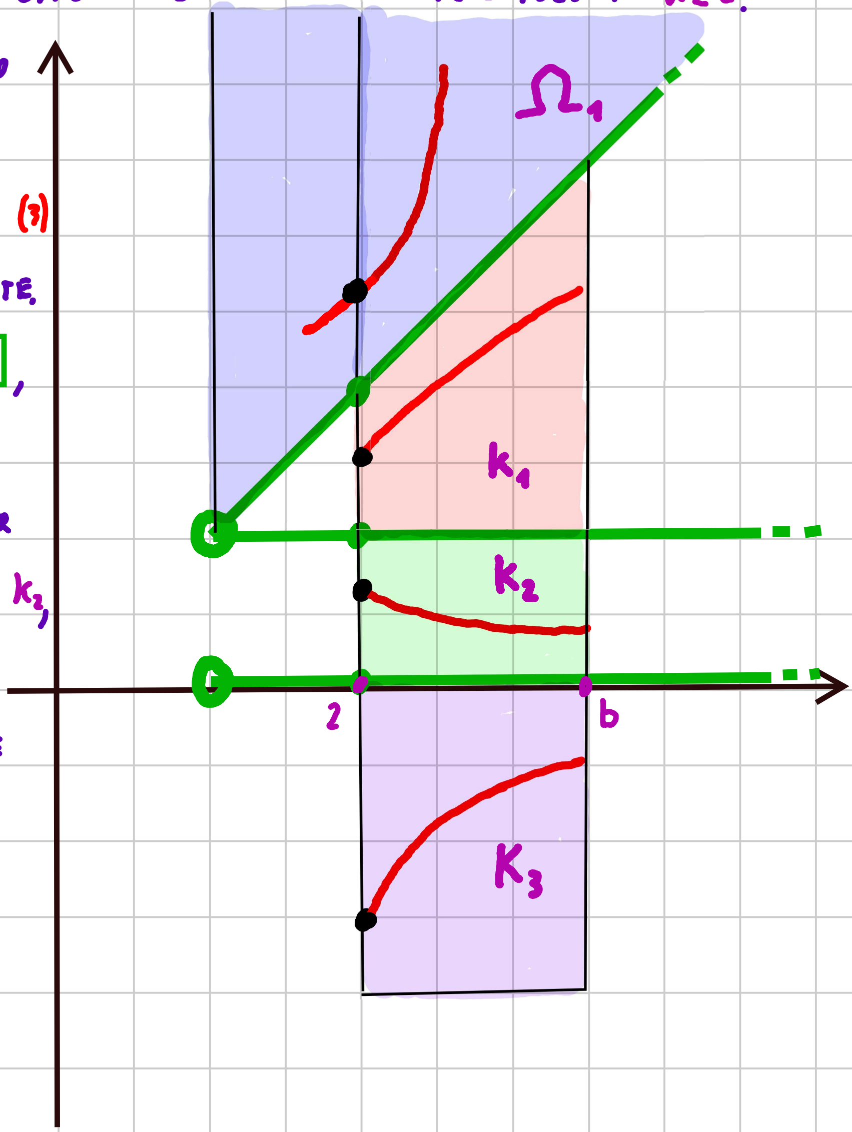
LE SOL. COSTANTI DELL'EQUAZ. SONO SEMPRE $y(x)\equiv 0$ E $y(x)\equiv 1$, QUINDI LA SOL. $y(x)$ DI (3) CON $y_0=\frac{1}{2}$ NON PUÒ INTERSECARLE, PER IL T. DI UNICITÀ. QUINDI, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE, RIMANE NELLA STRISCIA $0<y<1$. MOSTRIAMO CHE ALLORA È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.



INFATTI, SE PER ASSURDO NON FOSSE PROLUNGABILE OLTRE UN CERTO $b>2$, ALLORA IL SUO GRAFICO SULL'INTERVALLO $(0,b)$ SAREBBE CONTENUTO NEL COMPATTO $K=\{(x,y) \mid 1\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq 1\}$ (VEDI FIG. PAG. PREC.). MA ALLORA $y(x)$ È PROLUNGABILE OLTRE b, PER IL T. DELLA PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI.

$\boxed{c}$ DETTA $y_\alpha(x)$ LA SOLUZIONE DI (3) CON DATO INIZIALE $y(x_0)=\alpha$, MOSTRIAMO CHE $y_\alpha(x)$ È ESTENDIBILE FINO A $+\infty$ SE E SOLO SE $\alpha\leq 2$.

PER PRIMA COSA OSSERVIAMO CHE $y(x)\equiv 0$, $y(x)\equiv 1$ E $y(x)=x$ SONO SOLUZIONI DI (3) PER $y(x_0)=0,1,2$, RISPETTIVAMENTE. QUINDI, RAGIONANDO COME IN $\boxed{b}$, SI DIMOSTRA CHE $y_\alpha(x)$ È ESTENDIBILE FINO A $+\infty$ PER $0<\alpha<1$, USANDO IL COMPATTO K_2, E PER $1<\alpha<2$ USANDO IL COMPATTO K_1. SIMILE È ANCHE IL CASO $\alpha<0$ CON L'UNICA DIFFERENZA CHE SI UTILIZZA LA CRESCENZA DI $y_\alpha(x)$ PER DIRE CHE $y_\alpha(x)$ NON PUÒ TOCCARE IL LATO PIÙ BASSO DEL COMPATTO K_3.



INFINE PER MOSTRARE CHE PER $\alpha>2$ $y_\alpha(x)$ NON È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$ SI CONSIDERINO I P. DI CAUCHY:

$$(4)\quad \begin{cases} y'=\left(\dfrac{y^2-y}{x^2-y}\right)^3 \\ y(0)=\alpha \end{cases} \qquad\qquad (5)\quad \begin{cases} y'=\dfrac{y^2-y}{x^2-y} \\ y(0)=\alpha \end{cases}$$

SULL'APERTO $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x > 1\}$ SI HA:

(6) $$\left(\frac{y^2-y}{x^2-x}\right)^3 > \frac{y^2-y}{x^2-x}$$

QUESTO PERCHÉ $g(t) = t^2 - t$ È CRESCENTE PER $t > 1$ E DUNQUE, SE $1 < x < y$ SI HA:

$$\frac{y^2-y}{x^2-x} = \frac{g(y)}{g(x)} > 1$$

DA CUI SEGUE (6).

SICCOME LE SOLUZIONI DI (4) E (5) NON POSSONO INTERSECARE LA SOL. $y(x) = x$, FINCHÉ ESISTONO HANNO IL GRAFICO CHE STA IN Ω_1. MA SICCOME SU Ω_1 VALE (6) POSSO APPLICARE IL T. DEL CONFRONTO E DIRE CHE, FINCHÉ ESISTONO ENTRAMBE, PER $x > 2$ LA SOL. DI (4) STA SOPRA ALLA SOL. DI (5). MA LA SOL. DI (5) PUÒ ESSERE CALCOLATA ESPLICITAMENTE SEPARANDO LE VARIABILI. PIÙ PRECISAMENTE, SE IL DATO INIZIALE È $\alpha > 2$, LA SOL. DI (5) È:

$$y(x) = \frac{\alpha x}{(2\alpha-2)-(\alpha-2)x}$$

CHE HA UN ASINTOTO VERTICALE PER $x_0 = 2 + \frac{2}{\alpha-2}$, OVVERO $\lim_{x \to x_0^-} y(x) = +\infty$.
DI CONSEGUENZA ANCHE LA SOL. DI (4) NON PUÒ ESSERE PROLUNGATA OLTRE x_0

$\boxed{2}$ $\boxed{a}$ PER $\alpha = 1$ IL P. DI CAUCHY È:

(7) $$\begin{cases} y' = \frac{1-e^y}{e^y} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

LA CUI UNICA SOL. COSTANTE È $y(x) \equiv 0$, CHE CORRISPONDE AL DATO INIZIALE $y_0 = 0$.
TUTTE LE ALTRE SOL. SI OTTENGONO SEPARANDO LE VARIABILI:

$$\frac{e^y y'}{e^y - 1} = -\frac{1}{1+x^2}$$

DA CUI SEGUE:

$$\left(\ln\left|e^{y(x)}-1\right|\right)'=\left(-\arctan x\right)'$$

CIOÈ:

$$\ln\left|e^{y(x)}-1\right|=-\arctan x+c \qquad \text{CON } c\in\mathbb{R}$$

OVVERO:

$$e^{y(x)}=1\boxed{\pm e^{c}}\cdot e^{-\arctan x} \qquad \text{CON } c\in\mathbb{R}$$

CHE EQUIVALE A:

(8) $$y(x)=\ln\left(1+\boxed{k}e^{-\arctan x}\right) \qquad \text{CON } k\neq 0$$

PER AVERE $y(0)=1$ BISOGNA CHE SIA $1+k\cdot e^{0}=e$, CIOÈ $k=e-1$, QUINDI LA (8) DIVENTA:

$$y(x)=\ln\left(1+(e-1)e^{-\arctan x}\right)$$

CHE È DEFINITA PER OGNI $x\in\mathbb{R}$.

INVECE PER AVERE $y(0)=-1$ DEVE ESSERE $1+k=\frac{1}{e}$ CIOÈ $k=\frac{1}{e}-1$, PERCIÒ LA (8) DIVENTA:

$$y(x)=\ln\left(1-\left(1-\tfrac{1}{e}\right)e^{-\arctan x}\right)$$

CHE È DEFINITA PER $x>\tan\left(\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)$.

$\boxed{b}$ SIA $y(x)$ LA SOL. DI $\begin{cases} y'=\dfrac{1-e^{y}}{e^{y}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}} \\ y(0)=1 \end{cases}$

SI NOTI CHE IL 2° MEMBRO DELL'EQUAZ. È NEGATIVO SE $y>0$ E POSITIVO SE $y<0$.

INOLTRE LA SOL. COSTANTE È ANCORA LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA.

DI CONSEGUENZA, FINCHÉ $y(x)$ È DEFINITA, IL SUO GRAFICO RIMANE SOPRA L'ASSE x, QUINDI $y'(x)<0$ E DI CONSEGUENZA $y(x)$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE. GRAZIE A QUESTO, QUANDO LA SI PROLUNGA IN AVANTI, CONTINUA A SODDISFARE LA CONDIZIONE $0<y(x)<1$. QUINDI, SE PER ASSURDO FOSSE PROLUNGABILE NON FINO A $+\infty$ MA SOLO FINO A $b<+\infty$, ALLORA IL SUO GRAFICO PER $0<x<b$ SAREBBE TUTTO CONTENUTO NEL COMPATTO $K=\{(x,y)\mid 0\le x\le b,\ 0\le y\le 1\}$, QUINDI, PER IL TEOREMA DI PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI, $y(x)$ È PROLUNGABILE OLTRE b (ASSURDO).

$\boxed{C}$ SICCOME $y(x)$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE $\exists\, \ell = \lim_{x\to+\infty} y(x)$, INOLTRE DEVE ESSERE $0 \le \ell < 1$ PERCHÈ $y(x)$ È SEMPRE POSITIVA E $y(0)=1$.

MA NON PUÒ ESSERE $\ell \ne 0$ PERCHÈ, SE PER ASSURDO FOSSE COSÌ, ALLORA SI AVREBBE $y(x) > \ell$ PER OGNI $x>1$ E QUINDI:

SI OSSERVI CHE SONO NEGATIVE

$$\boxed{\frac{1-e^{y(x)}}{e^{y(x)}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} < \boxed{\frac{1-e^{\ell}}{e^{\ell}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} < \boxed{\frac{1-e^{\ell}}{e^{\ell}\cdot\sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

QUINDI ESISTEREBBE $A>0$ TALE CHE $\forall x>1$ SI HA

$$y'(x) = \frac{1-e^{y(x)}}{e^{y(x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} < -\frac{A}{\sqrt[3]{x^2}}$$

DI CONSEGUENZA $\forall x>1$ SI HA

$$y(x) - y(1) = \int_1^x y'(t)\,dt < -A\int_1^x \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt \xrightarrow{\text{PER } x\to+\infty} -\infty$$

QUINDI SI OTTERREBBE $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$, IN CONTRASTO COL FATTO CHE $y(x)>0$.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE $\ell \ne 0$.

CERCHIAMO ORA DI STIMARE L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $y(x)$ PER $x\to+\infty$.

A TALE SCOPO DIMOSTRIAMO CHE $\forall \varepsilon>0$ $\exists^{\text{no}}$ $\delta>0$ E $M>0$ T.C. SE $x>M$ E $0<y<\delta$ ALLORA SI HA:

(9)
$$-\frac{y}{\sqrt[3]{x^2}} < \frac{1-e^{y}}{e^{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} < -(1-\varepsilon)^2 \cdot \frac{y}{\sqrt[3]{x^2}}$$

PER DIMOSTRARE (9) SI OSSERVI CHE:

$$\frac{1-e^{y}}{e^{y}} = e^{-y} - 1 = -y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) = -y\left(1 - \frac{y}{2} + o(y)\right) \qquad \text{PER } y\to 0$$

DA CUI SEGUE CHE

(10)
$\exists \delta>0$ TALE CHE SE $0<y<\delta$ ALLORA $-y < \frac{1-e^{y}}{e^{y}} < -(1-\varepsilon)y$

INOLTRE:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$$

QUINDI, SICCOME PER $x\to+\infty$ SI HA $1 - \frac{1}{1+x^2} \to 1^-$, SI OTTIENE CHE

(11) $\exists M>0$ TALE CHE SE $x>M$ ALLORA $(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

COMBINANDO (10) E (11) SI OTTIENE (9).

MA POICHÉ SAPPIAMO CHE $Y(x)\to 0^+$ PER $x\to+\infty$, POSSIAMO PRENDERE $\bar{x}>M$ TALE CHE $\forall x\geq\bar{x}$ SI ABBIA $0<Y(x)<\delta$.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $\forall\varepsilon>0$ ESISTONO $\delta>0$, $M>0$ E $\bar{x}>M$ TALI CHE SULL'INSIEME

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<\delta,\ x>M\}$$

VALE LA (9) E INOLTRE PER $x\geq\bar{x}$ Ω CONTIENE IL GRAFICO DI $Y(x)$.

ORA, DETTO $\bar{Y}=f(\bar{x})$, CONSIDERIAMO I TRE P. DI CAUCHY:

$$(12)\ \begin{cases} y'=-\frac{y}{\sqrt[3]{x^2}} \\ y(\bar{x})=\bar{y} \end{cases} \qquad (13)\ \begin{cases} y'=\frac{1-e^y}{e^y}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}} \\ y(\bar{x})=\bar{y} \end{cases} \qquad (14)\ \begin{cases} y'=-(1-\varepsilon)^2\cdot\frac{y}{\sqrt[3]{x^2}} \\ y(\bar{x})=\bar{y} \end{cases}$$

LA SOL. DI (13) È LA NOSTRA $Y(x)$ MENTRE CON FACILI CALCOLI SI TROVA CHE LE SOL. $Y_1(x)$ DI (12) E $Y_2(x)$ DI (14) SONO:

$$Y_1(x)=\bar{Y}e^{3\sqrt[3]{\bar{x}}}\cdot e^{-3\sqrt[3]{x}} \qquad Y_2(x)=\bar{Y}\cdot e^{3(1-\varepsilon)^2\sqrt[3]{\bar{x}}}\cdot e^{-3(1-\varepsilon)^2\sqrt[3]{x}}$$

MA GRAZIE A (9) POSSIAMO APPLICARE IL T. DEL CONFRONTO E DIRE CHE PER OGNI $x>\bar{x}$ SI HA:

$$Y_1(x)<Y(x)<Y_2(x)$$

DA CUI SEGUE CHE PER $x\to+\infty$ $Y(x)$ VA A ZERO PIÙ RAPIDAMENTE DI OGNI FUNZIONE DEL TIPO $g(x)=k\,e^{-\lambda\sqrt[3]{x}}$ CON $\lambda<3$ MA NON PIÙ RAPIDAMENTE DI $h(x)=e^{-3\sqrt[3]{x}}$.