ESERCITAZIONE DEL 21/03/2023

1

DATI $A \subset \mathbb{R}$ E $f, g : A \to \mathbb{R}$ LIMITATE E TALI CHE $g(x) \leq f(x)$ PER OGNI $x \in A$, DEFINIAMO:

$$\alpha = \inf\{f(x) - g(x) \mid x \in A\}, \qquad \beta = \inf\{f(x) \mid x \in A\} - \inf\{g(x) \mid x \in A\}, \qquad \gamma = \inf\{f(x) \mid x \in A\} - \sup\{g(x) \mid x \in A\}.$$

DIRE SE SONO VERE O FALSE LE SEGUENTI AFFERMAZIONI, MOTIVANDO LA RISPOSTA:

a) COMUNQUE SI SCELGANO f E g, SI HA $\gamma \leq \alpha$ E $\gamma \leq \beta$.

b) SE $\beta = \gamma$ ALLORA g È COSTANTE

c) COMUNQUE SI SCELGANO f E g, SI HA $\beta \geq \alpha$ E $\beta \geq \gamma$.

2

CALCOLARE $\displaystyle\int_1^{16} \frac{3}{4x^9 + 4x^5 + x}\, dx$

3

Dato l'integrale improprio
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \cdot \ln\left(\frac{x^4 + 5x^2 + 6}{x^4 + 5x^2 + 4}\right) dx,$$

(a) calcolarlo per $\alpha = 1$;

(b) studiarne la convergenza al variare di $\alpha > 0$.

4

Sia dato l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \left|\alpha + \frac{\sin x}{4}\right|^x dx.$$
Studiarne la convergenza nei casi $\alpha = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ e infine (facoltativo) $\alpha = \frac{3}{4}$.

5

CONFRONTARE L'ORDINE DI INFINITESIMO PER $x \to 0^+$ DELLE SEGUENTI FUNZIONI:

$$F(x) = \int_x^{x+x^2} \frac{1}{\sqrt{t + t^{100}}}\, dt \qquad G(x) = \int_0^x \left|\sin \frac{1}{t}\right| dt \qquad K(x) = \max_{s \in [0,x]} |H(s)| \quad \text{DOVE} \quad H(x) = \int_0^x \sin\frac{1}{t}\, dt$$