Esercitazioni di Analisi Matematica 2 - 14 Marzo 2024 - docente: Callegari

Exe 2: Integrale di Riemann quesiti teorici

USANDO SOLO LA DEFINIZIONE CALCOLARE $\boxed{0}$ $\int_2^3 x\,dx$ $\boxed{1}$ $\int_0^1 x^3\,dx$.

DIRE SE $f\in\mathcal{R}([0,1])$ NEI SEGUENTI CASI:

$\boxed{2}$ $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{SE } x=0 \\ \dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & \text{SE } 0<x\leq 1 \end{cases}$

$\boxed{3}$ $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{SE } x=0 \\ \sin\left(\left[\frac{1}{x}\right]\right) & \text{SE } 0<x\leq 1 \end{cases}$

RISPONDERE AI SEGUENTI QUESITI MOTIVANDO LA RISPOSTA:

$\boxed{4}$ DATA $f\in\mathcal{R}([a,b])$ È SEMPRE POSSIBILE TROVARE $\mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE $s(f,\mathcal{P})=S(f,\mathcal{P})$?

$\boxed{5}$ SIANO $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ TALI CHE $f,h\in\mathcal{R}([a,b])$ E $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.
È VERO CHE $g\in\mathcal{R}([a,b])$?

$\boxed{6}$ COME $\boxed{5}$ MA AGGIUNGENDO L'IPOTESI CHE $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b h(x)\,dx$.

$\boxed{7}$ SIA $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ TALE CHE $\forall\varepsilon>0$ $\exists^{\text{no}}$ $f,h\in\mathcal{R}([a,b])$ TALI CHE $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$
E $\int_a^b h(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx<\varepsilon$. È VERO CHE $g\in\mathcal{R}([a,b])$?

$\boxed{8}$ DATA $f\in C([a,b])$, DEFINIAMO PER OGNI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, $\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$.
MOSTRARE CHE $\sigma_n\to\int_a^b f(x)\,dx$.
COSA SI PUÒ DIRE DELL'ORDINE DI INFINITESIMO DI $\sigma_n-\int_a^b f(x)\,dx$, NEL CASO CHE $f\in C^1([a,b])$?
E NEL CASO $f\in C^2([a,b])$?

$\boxed{9}$ SE $f\in\mathcal{R}([a,b])$ ED È SEMPRE NON NEGATIVA, È VERO CHE $\sqrt{f}\in\mathcal{R}([a,b])$.

$\boxed{10}$ SE $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ È VERO CHE ANCHE $f\cdot g\in\mathcal{R}([a,b])$?

$\boxed{11}$ DATA $f\in C([a,b])$, È VERO CHE SE È CONVESSA ALLORA $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$?

SOLUZIONI

$\boxed{0}$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ INDICHIAMO CON $\mathcal{P}_n$ LA PARTIZIONE DI $[2,3]$ IN n INTERVALLINI DELLA STESSA LUNGHEZZA, OVVERO $\mathcal{P}_n = \{2, 2+\frac{1}{n}, 2+\frac{2}{n}, \dots, 2+\frac{n-1}{n}, 3\}$.

LE CORRISPONDENTI SOMME DI RIEMANN SONO:

$$S_n = S(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\left(2+\frac{i}{n}\right) = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{2}{n}\cdot n + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} = \frac{5}{2}+\frac{1}{2n}$$

$$s_n = s(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\cdot\left(2+\frac{i-1}{n}\right) = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{2}{n}\cdot n + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n} = \frac{5}{2}-\frac{1}{2n}$$

DI CONSEGUENZA SI HA $\int^{+} f \le \frac{5}{2}$ PERCHÉ:

$$\int^{+} f = \mathrm{INF}\left\{ S(f,\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ PARTIZIONE DI } [0,1] \right\} \le \inf_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{5}{2}$$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI OTTIENE $\int^{-} f \ge \frac{5}{2}$.

MA ALLORA, RICORDANDO CHE È SEMPRE $\int^{-} f \le \int^{+} f$, OTTENIAMO:

$$\frac{5}{2} \le \int^{-} f \le \int^{+} f \le \frac{5}{2}$$

DA CUI SEGUE:

$$\int^{-} f = \int^{+} f = \frac{5}{2} = \int_a^b f(x)\,dx$$

QUINDI $f \in \mathcal{R}([2,3])$ E $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{5}{2}$

$\boxed{1}$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ SIA $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. SI HA:

(8)
$$s(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \cdot \inf_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)} x^3 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 =$$
$$= \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{2n-1}{n^2}.$$

(9)
$$S(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \cdot \sup_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)} x^3 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^3 =$$
$$= \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2n+1}{n^2}.$$

DA (8), PASSANDO AL SUP PER $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, SI HA:

$$\int_{[0,1]}^{-} x^3 \geq \frac{1}{4}$$

ANALOGAMENTE DA (9) SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^{+} x^3 \leq \frac{1}{4}$$

METTENDO INSIEME LE 2 COSE SI HA:

$$\frac{1}{4} \leq \int_{[0,1]}^{-} x^3 \leq \int_{[0,1]}^{+} x^3 \leq \frac{1}{4}$$

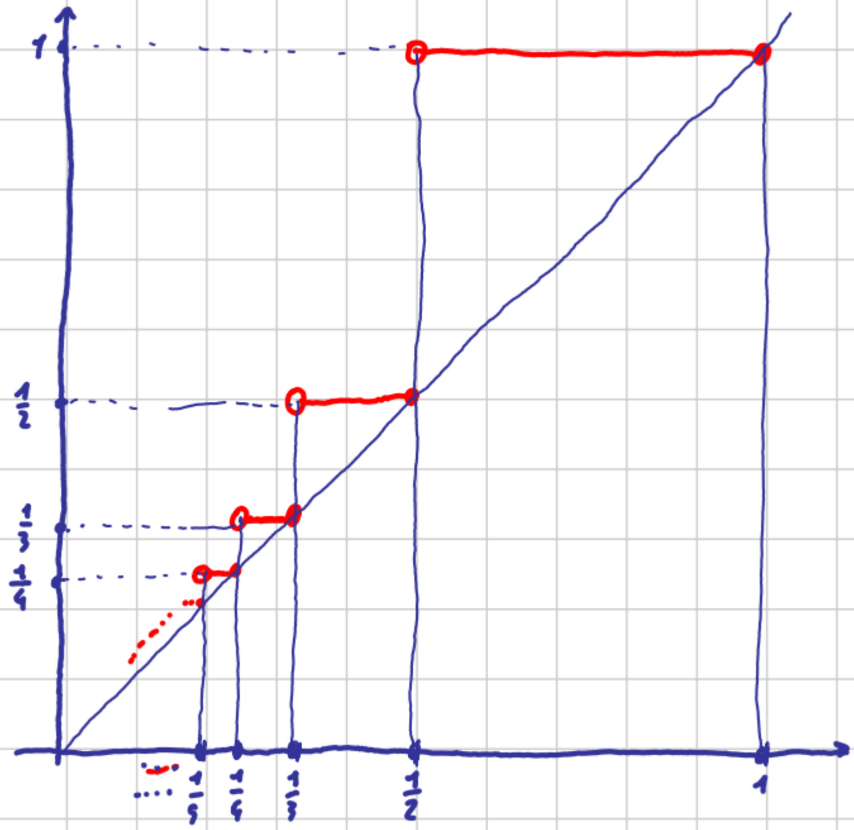
DA CUI SEGUE CHE x^3 È $\mathcal{R}$-INTEGRABILE SU $[0,1]$ E $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$.

2 PER MOSTRARE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$ BASTA VERIFICARE CHE f È CRESCENTE.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \iff n \leq \frac{1}{x} < n+1 \iff \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n$$

CIÒ SIGNIFICA CHE, PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SULL'INTERVALLO $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ LA FUNZIONE VALE $\frac{1}{n}$. QUINDI IL SUO GRAFICO È IL SEGUENTE:



DAL FATTO CHE f È CRESCENTE DEDUCIAMO CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$

---

3 SAPPIAMO GIÀ (VISTO A LEZIONE) CHE SE, SU $[a,b]$, UNA FUNZIONE È LIMITATA E L'INSIEME DEI SUOI PUNTI DI DISCONTINUITÀ È FINITO, ALLORA È $\mathcal{R}$-INTEGRABILE.

PURTROPPO L'INSIEME DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DELLA NOSTRA f È:

$$A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

CHE È INFINITO, QUINDI IL TEOREMA NON SI PUÒ APPLICARE SU TUTTO $[0,1]$.

TUTTAVIA, SE $\delta>0$, $A \cap [\delta,1]$ È FINITO QUINDI $f \in \mathcal{R}([\delta,1])$ PER OGNI $\delta>0$.

SFRUTTIAMO QUESTO FATTO PER MOSTRARE CHE PER OGNI $\varepsilon>0$ ESISTE $\mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[0,1]$ TALE CHE $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. QUESTO BASTA A GARANTIRE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

DUNQUE, PER OGNI $\varepsilon>0$ PRENDIAMO $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ E $\mathcal{P}'$ PARTIZIONE DI $[\delta,1]$ TALE CHE $S(f,\mathcal{P}') - s(f,\mathcal{P}') < \frac{\varepsilon}{2}$ (POSSIAMO FARLO PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([\delta,1])$).

MA ALLORA LA PARTIZIONE DI $[0,1]$ DATA DA $\mathcal{P} = \{0\} \cup \mathcal{P}'$ SODDISFA:

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \left(\delta\cdot 1 + S(f,\mathcal{P}')\right) - \left(\delta\cdot(-1) + s(f,\mathcal{P}')\right) =$$

$$= \delta\cdot(1-(-1)) + \left(S(f,\mathcal{P}') - s(f,\mathcal{P}')\right) < \frac{\varepsilon}{4}\cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

SI NOTI CHE CON ARGOMENTAZIONI DEL TUTTO ANALOGHE SI PUÒ DIMOSTRARE PIÙ IN GENERALE CHE, SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È LIMITATA E L'INSIEME DEI SUOI PUNTI DI DISCONTINUITÀ HA UN NUMERO FINITO DI PUNTI DI ACCUMULAZIONE, ALLORA $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

$\boxed{4}$ LA RISPOSTA È: NO. INFATTI SE CI FOSSE QUALCHE $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE FOSSERO UGUALI:

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

ALLORA f DOVREBBE ESSERE COSTANTE SU OGNI INTERVALLO $[x_{k-1}, x_k]$, ANZI SU TUTTO $[a,b]$, VISTO CHE GLI INTERVALLI $[x_{k-1}, x_k]$ SONO TUTTI CHIUSI.
QUINDI, SE f NON È COSTANTE, LA CONDIZIONE $S(f,P) = s(f,P)$ NON SI VERIFICA MAI.

$\boxed{5}$ LA RISPOSTA È BANALMENTE: NO.

INFATTI BASTA PRENDERE $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ DEFINITE DA:

$$f(x) \equiv 0, \quad h(x) \equiv 1, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{PER } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{PER } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

OVVIAMENTE f E g SONO $\mathcal{R}$-INTEGRABILI PERCHÉ SONO COSTANTI, MENTRE g NON È $\mathcal{R}$-INTEGRABILE (VISTO A LEZIONE). TUTTAVIA $f(x) \le g(x) \le h(x)$ PER OGNI $x \in [0,1]$.

$\boxed{6}$ AGGIUNGENDO A $\boxed{5}$ LA CONDIZIONE CHE $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$, LA RISPOSTA DIVENTA: SI.

INFATTI VALE LA CATENA DI DISUGUAGLIANZE:

PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([a,b])$

PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE INFERIORE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int^-_{[a,b]} f \le \int^-_{[a,b]} g \le \int^+_{[a,b]} g \le \int^+_{[a,b]} h = \int_a^b h(x)\,dx$$

PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE SUPERIORE

PERCHÉ $h \in \mathcal{R}([a,b])$

MA PER IPOTESI $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$, QUINDI TUTTI I "$\le$" DIVENTANO DEGLI "$=$".

$\boxed{7}$ PER OGNI $\varepsilon > 0$, PRENDIAMO $f, h \in \mathcal{R}([a,b])$ TALI CHE $f(x) \le g(x) \le h(x)$ E $\boxed{\int_a^b h(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \le \varepsilon}$.

VALGONO LE DISUGUAGLIANZE:

PER GLI STESSI MOTIVI DEL QUESITO $\boxed{6}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int^-_{[a,b]} f \le \int^-_{[a,b]} g \le \int^+_{[a,b]} g \le \int^+_{[a,b]} h = \int_a^b h(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$$

PER L'IPOTESI $\boxed{\,}$

MA ALLORA $0 \le \int^+_{[a,b]} g - \int^-_{[a,b]} g < \varepsilon$ PER OGNI $\varepsilon > 0$. DUNQUE $\int^+ g = \int^- g$ E QUINDI $g \in \mathcal{R}([a,b])$.

8 OSSERVIAMO CHE $\int_a^b f(x)\,dx$ ESISTE PERCHÉ $f\in C([a,b]) \Rightarrow f\in \mathcal{R}([a,b])$.

PER OGNI $n\in\mathbb{N}$ PONIAMO:

$$P_n=\left\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\cdot\frac{b-a}{n}, \dots, a+(n-1)\frac{b-a}{n}, b\right\}=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$S_n = S(f, P_n)$$

$$s_n = s(f, P_n)$$

E NOTIAMO CHE $a+\frac{b-a}{n}\left(k-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)$, QUINDI:

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\, f\left(\tfrac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)\right),$$

DA CUI SEGUE $s_n\le\sigma_n\le S_n$.

POICHÈ SAPPIAMO CHE PER OGNI $n\in\mathbb{N}$, SI HA ANCHE $s_n\le\int_a^b f(x)\,dx\le S_n$, BASTERÀ DIMOSTRARE CHE

$S_n-s_n\to 0$ PER AVERE CHE $\sigma_n\to\int_a^b f(x)\,dx$.

A TALE SCOPO RICORDIAMO CHE, PER IL TEOREMA DI HEINE-CANTOR, f È UNIFORMEMENTE CONTINUA SU $[a,b]$, QUINDI, PER OGNI $\varepsilon>0$, ESISTE $\delta>0$ TALE CHE, PER OGNI $x,y\in[a,b]$ SE $|x-y|<\delta$ ALLORA $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

DI CONSEGUENZA, NON APPENA $n>\frac{b-a}{\delta}$, SI HA $\frac{b-a}{n}<\delta$, E QUINDI:

$$S_n-s_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\cdot\left(\sup\{f(x)\mid x_{k-1}\le x\le x_k\}-\inf\{f(x)\mid x_{k-1}\le x\le x_k\}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon.$$

QUINDI $S_n-s_n\to 0$, DA CUI SEGUE $\sigma_n\to\int_a^b f(x)\,dx$.

MOSTRIAMO ORA CHE SE $f\in C^1([a,b])$ ALLORA $\left(\sigma_n-\int_a^b f(x)\,dx\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

SICCOME SIA σ_n CHE $\int_a^b f(x)\,dx$ SONO COMPRESI TRA S_n E s_n, BASTERÀ MOSTRARE CHE $S_n-s_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

A TALE SCOPO RICORDIAMO CHE SE $f\in C^1([a,b])$ ALLORA f È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ

$L=\max\{|f'(x)| \mid x\in[a,b]\}$. QUINDI

$$S_n-s_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\cdot\left(\sup\{f(x)\mid x_{k-1}\le x\le x_k\}-\inf\{f(x)\mid x_{k-1}\le x\le x_k\}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\cdot L\cdot\frac{b-a}{n}\right)=L\cdot(b-a)^2\cdot\frac{1}{n}$$

QUINDI $S_n-s_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ E, DI CONSEGUENZA, ANCHE $\sigma_n-\int_a^b f(x)\,dx=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

MOSTRIAMO INFINE CHE, SE $f\in C^2([a,b])$ ALLORA $\sigma_n-\int_a^b f(x)\,dx=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

POSTO $M=\max\{|f''(x)| \mid x\in[a,b]\}$ SI HA:

$$\left|G_n-\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^n (x_k-x_{k-1})\cdot f\left(\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right) - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \boxed{f(x)}\,dx\right| =$$

TAYLOR CON RESTO LAGRANGE

ξ_x È COMPRESO TRA x E $\frac12(x_k+x_{k-1})$

$$= \left|\sum_{k=1}^n f\left(\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right)\cdot\int_{x_{k-1}}^{x_k} 1\,dx - \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f\left(\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right) + f'\left(\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right)\cdot\left(x-\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right) + \tfrac12\left(x-\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right)^2 f''(\xi_x)\right)dx\right|$$

$$= \left|-\sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'\left(\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right)\cdot\left(x-\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right)dx}_{=0} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tfrac12 f''(\xi_x)\cdot\left(x-\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right)^2 dx\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tfrac12\left|f''(\xi_x)\right|\cdot\left(x-\tfrac12(x_{k-1}+x_k)\right)^2 dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tfrac12\cdot M\cdot\tfrac12\cdot\left(\tfrac{b-a}{n}\right)^2 dx = \sum_{k=1}^n \frac{M}{4}\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\cdot(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{M}{4}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = \frac{M}{4}\cdot(b-a)^3\cdot\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

---

9 MOSTRIAMO, PIÙ IN GENERALE, CHE SE $f\in\mathcal{R}([a,b])$, $A\supset f([a,b])$ E $G: A\to\mathbb{R}$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA SU A, ALLORA $G\circ f\in\mathcal{R}([a,b])$.

PER DIMOSTRARLO DOBBIAMO FAR VEDERE CHE, COMUNQUE SI FISSI $\varepsilon>0$, ESISTE $\mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE:

$$(\circledast)\qquad S(G\circ f,\mathcal{P}) - s(G\circ f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

A TALE SCOPO, FISSATO $\varepsilon>0$, SI PRENDANO:

(1) $\delta>0$ TALE CHE SE $x,y\in A$ E $|x-y|<\delta$ ALLORA $|G(x)-G(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)}$.
(QUESTO È POSSIBILE PERCHÉ G È UNIF. CONTINUA)

(2) $M = \operatorname{osc}(G, f([a,b])) = \sup\{G(x)\mid x\in f([a,b])\} - \inf\{G(x)\mid x\in f([a,b])\}$

(3) $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE $S(f,\mathcal{P})-s(f,\mathcal{P}) < \dfrac{\varepsilon\cdot\delta}{2M}$

MOSTREREMO CHE LA $\mathcal{P}$ SCELTA AL PUNTO (3) SODDISFA $(\circledast)$.

INTRODUCIAMO UN'ULTERIORE NOTAZIONE: OGNI INTERVALLINO $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ DETERMINATO DA $\mathcal{P}$ SU $[a,b]$ VERRÀ DETTO "BUONO" SE $osc(f, I_k) < \delta$, ALTRIMENTI VERRÀ DETTO "CATTIVO".

OSSERVIAMO CHE SE $\mathcal{P}$ SODDISFA (3), LA SOMMA DELLE LUNGHEZZE DEGLI INTERVALLINI "CATTIVI" È MINORE DI $\frac{\varepsilon}{2M}$. INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE, SI AVREBBE:

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot osc(f, [x_{k-1}, x_k]) \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{k=1 \\ (\text{con } I_k \text{ "cattivo"})}}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot osc(f, [x_{k-1}, x_k]) \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{k=1 \\ (\text{con } I_k \text{ "cattivo"})}}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \delta = \delta \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ (\text{con } I_k \text{ "cattivo"})}}^{n} (x_k - x_{k-1}) \geq \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2M}$$

IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon \delta}{2M}$.

ORA SIAMO PRONTI PER VERIFICARE (✱).

SI HA:

$$S(G\circ f,\mathcal{P}) - s(G\circ f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot osc(G\circ f, I_k)$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ I_k \text{ "buono"}}}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot osc(G\circ f, I_k) + \sum_{\substack{k=1 \\ I_k \text{ "cattivo"}}}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot osc(G\circ f, I_k) \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{k=1 \\ I_k \text{ "buono"}}}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sum_{\substack{k=1 \\ I_k \text{ "cattivo"}}}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot M =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ I_k \text{ "buono"}}}^{n} (x_k - x_{k-1}) + M \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ I_k \text{ "cattivo"}}}^{n} (x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2\cdot(b-a)} \cdot (b-a) + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

TRATTIAMO PRIMA IL CASO IN CUI $f, g > 0$.

SICCOME SONO LIMITATE PRENDIAMO $M > 0$ TALE CHE

$$\forall x \in [a,b] \quad 0 < f(x) < M \quad E \quad 0 < g(x) < M$$

PER OGNI $A \subset [a,b]$ VALGONO LE PROPRIETÀ:

1) $\sup\{f(x)\cdot g(x) \mid x \in A\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in A\} \cdot \sup\{g(x) \mid x \in A\}$

2) $\inf\{f(x)\cdot g(x) \mid x \in A\} \geq \inf\{f(x) \mid x \in A\} \cdot \inf\{g(x) \mid x \in A\}$

3) $\operatorname{osc}(f\cdot g, A) \leq M \operatorname{osc}(f, A) + M \operatorname{osc}(g, A)$

PER DIMOSTRARE (1) SI OSSERVI CHE $\forall x \in A$ SI HA:

$$f(x) \leq \sup\{f(x) \mid x \in A\} \quad E \quad g(x) \leq \sup\{g(x) \mid x \in A\}$$

DA CUI SEGUE (ESSENDO TUTTE QUANTITÀ NON NEGATIVE) CHE:

$$\forall x \in A \quad f(x)\cdot g(x) \leq \sup\{f(x) \mid x \in A\} \cdot \sup\{g(x) \mid x \in A\}$$

DA CUI SEGUE (1).

LA DIMOSTRAZIONE DI (2) È SIMILE.

DIMOSTRIAMO (3).

PER BREVITÀ, ANZICHÈ SCRIVERE $\sup\{F(x) \mid x \in A\}$ SCRIVEREMO S_F E, ANALOGAMENTE $\inf\{F(x) \mid x \in A\}$ SI SCRIVERÀ I_F. SI HA:

$$\operatorname{osc}(f\cdot g, A) = S_{f\cdot g} - I_{f\cdot g} \leq$$

GRAZIE A (1) E A (2)

$$\leq S_f \cdot S_g - I_f \cdot I_g =$$

$$= S_f \cdot S_g - I_f \cdot S_g + I_f \cdot S_g - I_f \cdot I_g =$$

$$= S_g \cdot (S_f - I_f) + I_f \cdot (S_g - I_g) =$$

$$= S_g \cdot \operatorname{osc}(f, A) + I_f \cdot \operatorname{osc}(g, A) \leq M \cdot \operatorname{osc}(f, A) + M \operatorname{osc}(g, A)$$

ORA, $\forall \varepsilon > 0$ SIA $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ UNA PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE VALGANO SIMULTANEAMENTE LE CONDIZIONI:

$$(\blacktriangle) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

E

$$(\blacksquare) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}\left(g, [x_{i-1}, x_i]\right) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

TALE P ESISTE SENZ'ALTRO PERCHÉ, ESSENDO $f \in \mathcal{R}([a,b])$, C'È P_1 CHE SODDISFA $(\blacktriangle)$ E, ESSENDO $g \in \mathcal{R}([a,b])$, C'È P_2 CHE SODDISFA $(\blacksquare)$, QUINDI BASTA PRENDERE $P = P_1 \cup P_2$.

UTILIZZANDO TALE P PER $f \cdot g$, SI HA:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}\left(f \cdot g, [x_{i-1}, x_i]\right) \overset{(3)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(M \cdot \operatorname{osc}\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) + M \operatorname{osc}\left(g, [x_{i-1}, x_i]\right) \right) =$$

$$= M \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \operatorname{osc}\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) + M \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \operatorname{osc}\left(g, [x_{i-1}, x_i]\right) \overset{(\blacktriangle) \text{ E } (\blacksquare)}{<}$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE, NEL CASO PARTICOLARE $f > 0$ E $g > 0$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P = \{x_0, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ T.C.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}\left(f \cdot g, [x_{i-1}, x_i]\right) < \varepsilon$$

QUINDI $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.

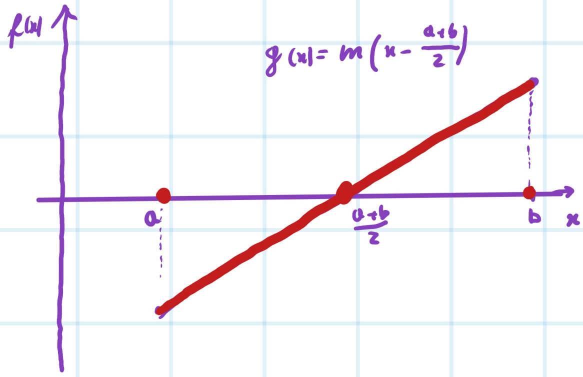
NEL CASO GENERALE (f E g DI SEGNO QUALSIASI) PRESO $M > 0$ T.C. $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| < M$ E $|g(x)| < M$, BASTA OSSERVARE CHE

$$f \cdot g = (f + M)(g + M) - Mf - Mg - M^2$$

E CHE $(f+M) \cdot (g+M)$ RIENTRA NEL CASO PARTICOLARE GIÀ TRATTATO.

11

PREMETTIAMO UN'OSSERVAZIONE:
LA FUNZIONE $g(x)= m\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$ È $\mathcal{R}$-INTEGRABILE SU $[a,b]$ E IL SUO INTEGRALE VALE SEMPRE 0, QUALSIASI SIA LA PENDENZA m. INFATTI, PER OGNI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ SIA:



$$P_n=\{x_0,x_1,\dots,x_{2n}\}=$$
$$=\left\{a,\ a+\frac{b-a}{2n},\dots,\ a+\frac{b-a}{2}\cdot k,\dots,\ a+\frac{b-a}{2n}(2n-1),\ b\right\}$$

DOPO FACILI CALCOLI SI OTTIENE $s_n=s(g,P_n)=-\frac{m(b-a)^2}{n}$ E $S_n=S(g,P_n)=\frac{m(b-a)^2}{n}$

QUINDI PER $n\to+\infty$, SI HA $S_n\searrow 0$ E $s_n\nearrow 0$. INOLTRE, PER OGNI $n\in\mathbb{N}$ SI HA $s_n\le\int^-_{[a,b]} g\le\int^+_{[a,b]} g\le S_n$.

DI CONSEGUENZA $\int^- g=\int^+ g=0=\int_a^b g(x)\,dx$.

SIAMO ORA IN GRADO DI DIMOSTRARE LE DISUGUAGLIANZE RICHIESTE. PER PRIMA COSA RISCRIVIAMOLE:

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\int_a^b f(x)\,dx\le(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

DALLA CONVESSITÀ DI f SEGUE CHE LA RETTA $r(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, CHE PASSA PER I PUNTI $(a,f(a))$ E $(b,f(b))$, PER OGNI $x\in[a,b]$ SODDISFA $f(x)\le r(x)$. DI CONSEGUENZA:

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b r(x)\,dx=\int_a^b f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,dx=$$

PERCHÉ: $f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)=$
$=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=$
$=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=$
$=\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$

$$=\int_a^b\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=$$

$$=\boxed{\int_a^b\frac{f(a)+f(b)}{2}\,dx}+\boxed{\int_a^b\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx}=$$

PERCHÉ È L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE COSTANTE

PER L'OSSERVAZIONE FATTA ALL'INIZIO

$$=\boxed{(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}}+\boxed{0}=(b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $\int_a^b f(x)\,dx\le(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

PER DIMOSTRARE L'ALTRA DISUGUAGLIANZA RICORDIAMO CHE, SEMPRE DALLA CONVESSITÀ DI f SEGUE CHE SE $f'_-\left(\frac{a+b}{2}\right)\le m\le f'_+\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ALLORA LA RETTA $s(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+m\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$ VERIFICA $s(x)\le f(x)$ PER TUTTI GLI $x\in[a,b]$.

DI CONSEGUENZA

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) + m\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx =$$

$$= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx + \int_a^b m\left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 0 = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO ANCHE LA DISUGUAGLIANZA $(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)\,dx$