# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

# ESERCIZI

(CON RISULTATI E ALCUNI SVOLGIMENTI)

## INDICE PROVVISORIO:

# Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 9

Titolo nota 15/08/2014

6 maggio 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

NOTA: I PROBLEMI CON L'ASTERISCO SONO PIŪ DIFFICILI

## RISOLVERE I SEGUENTI PROB. DI CAUCHY:

**1** $\begin{cases} y' = 2x^3 e^{y-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

**2** $\begin{cases} y' = -y^2 \cos x \, e^{-\frac{1}{y} + \sin x} \\ y(0) = \frac{1}{\ln 2} \end{cases}$

**3** $\begin{cases} y' = \dfrac{\pi \cdot (y^2 - 2y + 2)}{2\sqrt{x}} \\ y(\frac{1}{4}) = 0 \end{cases}$

**4** (*) $\begin{cases} y' = -\dfrac{\left(\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt[3]{y}\right)^2}{4x} \\ y(1) = 8 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} y' = 3\cos^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 y \\ y(4\pi) = -5\pi \end{cases}$

**6** (*) $\begin{cases} y' = 3\cos^2 x \cdot |\sin x| \cdot \cos^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

---

## TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DELLE SEGUENTI EQUAZIONI DIFFERENZIALI:

**7** $y' = \dfrac{x}{y}$

**8** $y' = y \ln y$

**9** $y' = e^{-y} \tan x$

**10** $y' = \dfrac{xy \ln y^2}{1 + x^4}$

---

**11** (*) SIA $(I, y(x))$ LA SOLUZIONE MASSIMALE DI $\begin{cases} y' = x e^x \sin(y^2 - 4y + 3) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

**a** TROVARE $\inf_{x \in I} y(x)$ E $\sup_{x \in I} y(x)$ (E, SE CI SONO, ANCHE $\max_{x \in I} y(x)$ E $\min_{x \in I} y(x)$)

**b** CALCOLARE $\lim_{x \to 0} \dfrac{y(x) - 2}{x^2}$

---

**12** (*) DEFINIAMO $F(y) = \begin{cases} -y \ln y & \text{SE } y > 0 \\ 0 & \text{SE } y \leq 0 \end{cases}$ E CONSIDERIAMO IL PR. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

**a** MOSTRARE CHE F NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0.

**b** DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE IL PR. DI CAUCHY ASSEGNATO HA UNA SOLA SOL. OPPURE NO

6 maggio 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

# SOLUZIONI

**P.1** RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = 2x^3 e^{y-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

SVOLGIMENTO

SICCOME $e^y$ NON SI ANNULLA MAI, LA SOL. $y(x)$ SODDISFA:

(1)
$$-e^{-y(x)}\, y'(x) = -2x^3 e^{-x^2}$$

ABBIAMO:
$$\int -2x^3 e^{-x^2} = \int -x^2 e^{-x^2} \cdot (2x)\, dx \overset{u=x^2}{=} \int -u\, e^{-u}\, du =$$
$$= \int u\,(e^{-u})'\, du = u\, e^{-u} - \int e^{-u}\, du =$$
$$= u e^{-u} + e^{-u} = (x^2+1)\, e^{-x^2}$$

QUINDI LA **(1)** DIVENTA:
$$\left(e^{-y(x)}\right)' = \left((x^2+1)\, e^{-x^2}\right)'$$

CIOÈ
$$e^{-y(x)} = (x^2+1)\cdot e^{-x^2} + c$$

DA CUI SEGUE:

(2)
$$y(x) = -\ln\left((x^2+1)\cdot e^{-x^2} + c\right)$$

MA PERCHÉ SIA $y(0)=0$, DEVE ESSERE:
$$-0 = \ln\left((0+1)\cdot e^0 + c\right)$$

CIOÈ:
$$0 = \ln(1+c)$$

DA CUI SEGUE $c=0$.

QUINDI LA **(2)** DIVENTA:

$$y(x) = -\ln\left((x^2+1)\cdot e^{-x^2}\right) = x^2 - \ln(1+x^2)$$

CHE È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE. INFATTI:

$$y'(x) = \left(x^2 - \ln(1+x^2)\right)' = 2x - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x+2x^3-2x}{1+x^2} = \boxed{\frac{2x^3}{1+x^2}}$$

UGUALI

E

$$2x^3 \cdot e^{y(x)-x^2} = 2x^3 \cdot e^{-\ln(1+x^2)} = 2x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \boxed{\frac{2x^3}{1+x^2}}$$

QUINDI LA SOL. MASSIMALE DEL SISTEMA È $(\mathbb{R}, y(x))$ CON $y(x)$ DATA DA:

$$y(x) = x^2 - \ln(1+x^2)$$

---

**P.2** RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY
$$\begin{cases} y' = -y^2 \cos x \, e^{-\frac{1}{y}+\sin x} \\ y(0) = \frac{1}{\ln 2} \end{cases}$$

**SVOLGIMENTO**

DETTA $y(x)$ LA SOL. CERCATA, ESSA DEVE SODDISFARE:

$$y'(x) = -(y(x))^2 e^{-\frac{1}{y(x)}} \cdot \cos x \, e^{\sin x}$$

CHE, FINCHÉ $y(x) \neq 0$, EQUIVALE A:

$$e^{\frac{1}{y(x)}} \cdot \left(-\frac{1}{(y(x))^2}\right) \cdot y'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

CIOÈ:

$$\left(e^{\frac{1}{y(x)}}\right)' = \left(e^{\sin x}\right)'$$

CIOÈ:

$$e^{\frac{1}{y(x)}} = e^{\sin x} + c$$

CIOÈ:

$$y(x) = \frac{1}{\ln(e^{\sin x} + c)}$$

RICORDANDO CHE DEVE ESSERE $y(0) = \frac{1}{\ln 2}$, SI HA:

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln(e^0 + c)}$$

DA CUI SEGUE $C=1$, PER CUI LA SOL CERCATA È:

$$y(x)=\frac{1}{\ln(e^{\sin x}+1)}$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE TALE $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE. INFATTI:

$$y'(x)=\left(\frac{1}{\ln(1+e^{\sin x})}\right)'=\boxed{-\frac{1}{\ln^2(1+e^{\sin x})}\cdot\frac{1}{1+e^{\sin x}}\cdot\cos x\, e^{\sin x}}$$

UGUALI

E

$$-(y(x))^2\cos x\cdot e^{-\frac{1}{y(x)}+\sin x}=-\frac{1}{\ln^2(1+e^{\sin x})}\cdot\cos x\cdot\frac{1}{e^{\ln(1+e^{\sin x})}}\cdot e^{\sin x}=$$

$$=\boxed{-\frac{1}{\ln^2(1+e^{\sin x})}\cdot\frac{1}{1+e^{\sin x}}\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}}$$

---

**P.3** RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} y'=\dfrac{\pi\cdot(y^2-2y+2)}{2\sqrt{x}} \\ y\left(\frac{1}{4}\right)=0 \end{cases}$

## SVOLGIMENTO

LA SOLUZIONE CERCATA $y(x)$ DEVE SODDISFARE:

(3) $$y'(x)=\left((y(x))^2-2y(x)+2\right)\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

MA SICCOME $y^2-2y+2$, CIOÈ $(y-1)^2+1$, NON SI ANNULLA MAI, LA (3) EQUIVALE A:

$$\frac{1}{(y(x)-1)^2+1}\,y'(x)=\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

CIOÈ:

$$\left(\arctan(y(x)-1)\right)'=\left(\pi\sqrt{x}\right)'$$

CIOÈ:

$$\arctan(y(x)-1)=\pi\sqrt{x}+C$$

CIOÈ:

$$y(x)=1+\tan\left(\pi\sqrt{x}+C\right)$$

MA AFFINCHÉ SIA $y\left(\frac{1}{4}\right)=0$, DEVE ESSERE:

$$0 = 1 + \tan\left(\pi \cdot \frac{1}{2} + C\right)$$

CIOÈ $C = -\frac{3}{4}\pi$.

QUINDI LA SOL. CERCATA È:

**(6)**
$$y(x) = 1 + \tan\left(\pi\sqrt{x} - \frac{3}{4}\pi\right)$$

L'INTERVALLO MASSIMALE DEL DOMINIO DI $y(x)$ CHE CONTIENE IL PUNTO $x_0 = \frac{1}{4}$ È:

$$-\frac{\pi}{2} < \pi\sqrt{x} - \frac{3}{4}\pi < \frac{\pi}{2}$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{4} < \sqrt{x} < \frac{5}{4}$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{16} < x < \frac{25}{16}$$

POICHÈ LA VERIFICA DIRETTA (CHE STAVOLTA OMETTIAMO) MOSTRA CHE **(6)** SODDISFA L'EQUAZIONE SU TUTTO L'INTERVALLO $\left(\frac{1}{16}, \frac{25}{16}\right)$, POSSIAMO CONCLUDERE CHE LA SOL. CERCATA È $(I, y(x))$, CON $I = \left(\frac{1}{16}, \frac{25}{16}\right)$ E $y(x)$ DATO DA **(6)**.

---

**P.4** RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY
$$\begin{cases} y' = -\dfrac{\left(\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt[3]{y}\right)^2}{4x} \\ y(1) = 8 \end{cases}$$
**(5)**

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

LA FUNZIONE:

$$F(y) = \left(\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt[3]{y}\right)^2 = \sqrt[3]{y^2} \cdot \left(\sqrt[3]{y} + 2\right)^2$$

SI ANNULLA PER $y = 0$ E $y = -8$, QUINDI L'EQUAZIONE (NON IL P. DI CAUCHY!) HA 2 SOL. COSTANTI: $y_1(x) \equiv 0$ E $y_2(x) \equiv -8$.

SI NOTI CHE $F(y)$ NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0, QUINDI NEI PUNTI DI ORDINATA 0 NON VALE IL TEO. DI ES. E UNICITÀ.

CIÒ SIGNIFICA CHE LA SOLUZIONE COSTANTE $y(x) \equiv 0$ POTREBBE ESSERE INTERSECATA DA ALTRE SOLUZIONI.

INVECE LA SOL. $y_2(x) \equiv -8$ NON PUÒ ESSERE INTERSECATA, PERCHÈ IL TEO. DI ES. E UNICITÀ VALE.

QUINDI LA SOL. $y(x)$ DI **(5)**, FINCHÈ ESISTE, STARÀ SOPRA QUOTA $-8$. INOLTRE IL SUO INTERVALLO DI DEFINIZIONE $I$ È CONTENUTO IN $(0, +\infty)$ VISTO CHE PER $x = 0$, IL SECONDO

MEMBRO DELL'EQUAZIONE NON È DEFINITO.

IN TUTTI I CALCOLI CHE SEGUONO SUPPORREMO QUINDI

(6) $$y(x) > -8 \quad \text{E} \quad x > 0$$

CERCHIAMO QUINDI, CON TALI VINCOLI, TUTTE LE $y(x)$ CHE SODDISFANO L'EQUAZIONE, CIOÈ TALI CHE:

$$y'(x) = -\frac{\sqrt[3]{(y(x))^2} \cdot \left(\sqrt[3]{y(x)} + 2\right)^2}{4x}$$

SE OLTRE A (6) VALE $y(x) \neq 0$, CIÒ EQUIVALE A:

$$-\frac{y'(x)}{\left(\sqrt[3]{y(x)} + 2\right)^2 \cdot 3\sqrt[3]{(y(x))^2}} = \frac{1}{12x}$$

CHE, ESSENDO $x > 0$, EQUIVALE A:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y(x)} + 2}\right)' = \left(\frac{1}{12} \ln x\right)'$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{y(x)} + 2} = \frac{1}{12} \ln x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

(7) $$y(x) = \left(\frac{12}{12C + \ln x} - 2\right)^3 \qquad C \in \mathbb{R}$$

LA VERIFICA DIRETTA [....] MOSTRA CHE $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE SU TUTTO IL SUO DOMINIO, PER OGNI FISSATO $C \in \mathbb{R}$. SE VOGLIAMO CHE $y(1) = 8$ BISOGNA CHE:

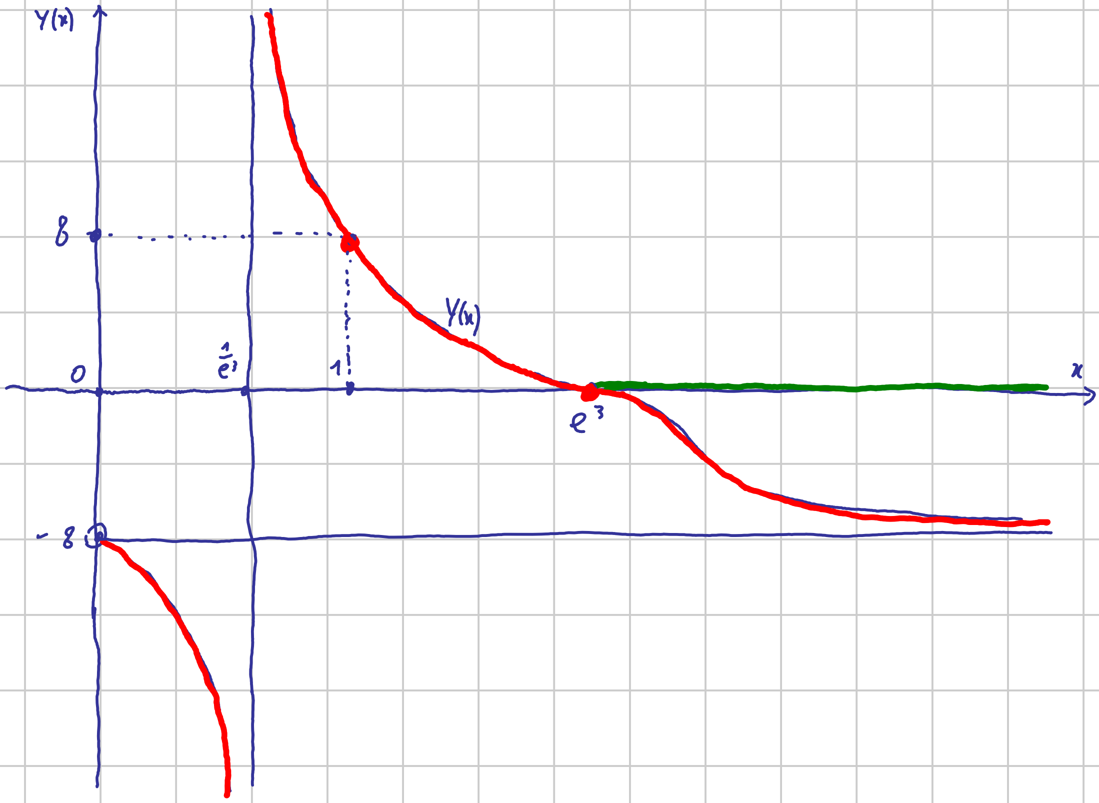
$$8 = \left(\frac{12}{12C + \ln 1}\right)^3$$

CIOÈ CHE $C = \frac{1}{4}$.

QUINDI UNA SOL. DI (5) È DATA DA:

(8) $$y(x) = \left(\frac{12}{3 + \ln x} - 2\right)^3$$

SI NOTI CHE $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE PER OGNI $x$ DEL SUO DOMINIO, IN PARTICOLARE ANCHE PER $x = e^3$, PUNTO NEL QUALE $y(x)$ TOCCA QUOTA 0, QUINDI INTERSECA LA SOL. COSTANTE $y(x) \equiv 0$. FACENDO GLI OPPORTUNI CALCOLI SI TROVA CHE IL GRAFICO DI $y(x)$ È IL SEGUENTE.




QUINDI COME SOL. MASSIMALE DI **(5)** POSSO PRENDERE $(I, y(x))$ CON $I=\left(\frac{1}{e^3},+\infty\right)$ E $y(x)$ DATA DA **(8)**. PERÒ NON È L'UNICA POSSIBILITÀ: VISTO CHE PER $x=e^3$ LA DERIVATA SI ANNULLA, POSSO ANCHE SCEGLIERE:

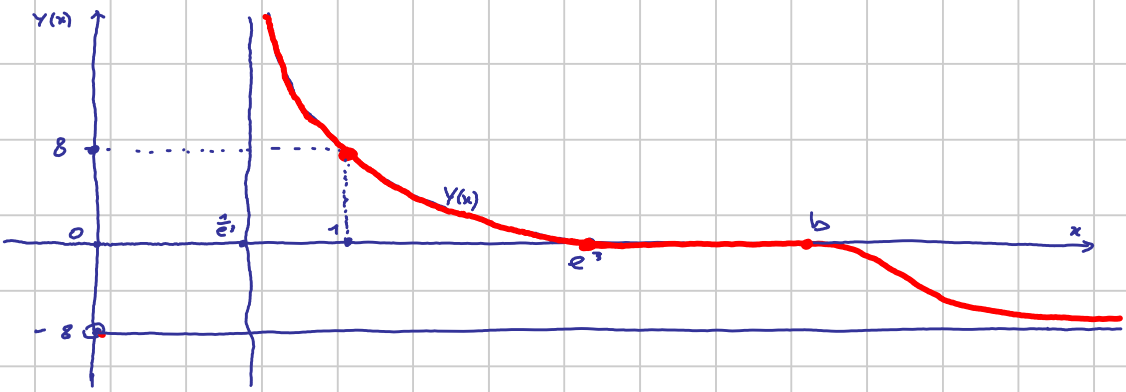
$$\tilde{y}(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{12}{3+\ln x}-2\right)^3 & \text{PER } \frac{1}{e^3}<x<e^3\\[2ex] 0 & \text{PER } x\geq e^3\end{cases}$$

OPPURE, PIÙ IN GENERALE, PER OGNI $b>e^3$, POSSO DEFINIRE:

$$y_b(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{12}{3+\ln x}-2\right)^3 & \text{PER } \frac{1}{e^3}<x<e^3\\[2ex] 0 & \text{PER } e^3\leq x\leq b\\[2ex] \underbrace{\left(\dfrac{12}{6-\ln b+\ln x}-2\right)^3} & \text{PER } x>b\end{cases}$$

OTTENUTA DA **(7)**
METTENDO $c=\frac{6-\ln b}{12}$

IL GRAFICO DI $y_b(x)$ È IL SEGUENTE:




LE SOL. DI **(5)** SONO INFINITE: VANNO BENE SIA $y(x)$, SIA $\tilde{y}(x)$ SIA $y_b(x)$ $\forall b>e^3$.

**P.5** RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY
(9)
$$\begin{cases} y' = 3\cos^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 y \\ y(4\pi) = -5\pi \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

LA SOL. $y(x)$ DI **(9)**, FINCHÉ VIVE, RIMANE COMPRESA TRA LE 2 SOL. COSTANTI $y(x) \equiv -\frac{11}{2}\pi$ E $y(x) \equiv -\frac{9}{2}\pi$. ESSA SODDISFA:

$$y'(x) = 3\cos^2 x \sin x \cdot \cos^2(y(x))$$

CHE, ESSENDO $-\frac{11}{2}\pi < y(x) < -\frac{9}{2}\pi$, EQUIVALE A:

$$\frac{y'(x)}{\cos^2(y(x))} = 3\cos^2 x \sin x$$

CIOÈ:

$$\left(\tan y(x)\right)' = \left(-\cos^3 x\right)'$$

CIOÈ:

$$\tan y(x) = -\cos^3 x + c$$

CHE, PER $-\frac{11}{2}\pi < y(x) < -\frac{9}{2}\pi$, EQUIVALE A:

**(10)** $$y(x) = -5\pi + \arctan\left(c - \cos^3 x\right)$$

PERCHÉ SIA $y(4\pi) = -5\pi$ BISOGNA CHE:

$$-5\pi = -5\pi + \arctan(c-1)$$

CIOÈ CHE $c=1$. QUINDI PONENDO $c=1$ NELLA **(10)** SI OTTIENE LA SOL. CERCATA:

$$y(x) = -5\pi + \arctan\left(1 - \cos^3 x\right)$$

---

**P.6** RISOLVERE IL PROB. DI CAUCHY
(11)
$$\begin{cases} y' = 3\cos^2 x \cdot |\sin x| \cdot \cos^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

DETTA $y(x)$ LA SOL DI **(11)**, FINCHÉ VIVE RIMANE NELLA ZONA COMPRESA TRA LE 2 SOL. COSTANTI $y(x) \equiv -\frac{\pi}{2}$ E $y(x) \equiv \frac{\pi}{2}$. INOLTRE, SODDISFA L'EQUAZIONE:

**(12)** $$y'(x) = 3\cos^3 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 y(x) \qquad \text{SE} \quad 2k\pi \le x \le (2k+1)\pi, \quad \text{CON } k \in \mathbb{Z}$$

E

**(13)** $$y'(x) = 3\cos^3 x \cdot (-\sin x) \cdot \cos^2 y(x) \qquad \text{SE} \quad (2k+1)\pi \le x \le (2k+2)\pi, \quad \text{CON } k \in \mathbb{Z}$$

PROCEDENDO COME IN $\boxed{P.5}$ SI TROVA CHE (12) EQUIVALE A:

$$\tan y(x) = c - \cos^3 x$$

CHE, SICCOME $-\frac{\pi}{2} < y(x) < \frac{\pi}{2}$, EQUIVALE A:

(14) $$y(x) = \arctan\left(c - \cos^3 x\right)$$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI TROVA CHE SE $y(x)$ SODDISFA (13) ALLORA È DELLA FORMA:

(15) $$y(x) = \arctan\left(c + \cos^3 x\right)$$

QUINDI SU OGNI INTERVALLO DI TIPO $[k\pi, (k+1)\pi]$ SCELGO $y(x)$ DEL TIPO (14), SE $k$ È PARI, E DEL TIPO (15), SE $k$ È DISPARI, AVENDO CURA CHE TUTTI I "PEZZI" SI RACCORDINO IN MODO LISCIO NEI PUNTI DI TIPO $x = k\pi$ E CHE INOLTRE $y(0)=0$.

PIÙ PRECISAMENTE SI TROVA:

$$y(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ \arctan\left(1 - \cos^3 x\right) & \text{PER } x \in [0, \pi) \\ \arctan\left(3 + \cos^3 x\right) & \text{PER } x \in [\pi, 2\pi) \\ \arctan\left(5 - \cos^3 x\right) & \text{PER } x \in [2\pi, 3\pi) \\ \arctan\left(7 + \cos^3 x\right) & \text{PER } x \in [3\pi, 4\pi) \\ \vdots & \vdots \\ \arctan\left(2k+1 - (-1)^k \cdot \cos^3 x\right) & \text{PER } x \in [k\pi, (k+1)\pi) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

TALE $y(x)$ È DI CLASSE $C^1$ PERCHÉ NEI PUNTI DI RACCORDO $x = k\pi$ SI HA:

$$\lim_{x \to k\pi^-} y(x) = \lim_{x \to k\pi^-} \arctan\left(2k-1 - (-1)^{k-1} \cos^3 x\right) = \arctan\left(2k-1 + (-1)^k \cdot (\cos k\pi)^3\right)$$

$$= \arctan\left(2k-1 + (-1)^k \cdot \left((-1)^k\right)^3\right) = \arctan 2k$$

$$\lim_{x \to k\pi^+} y(x) = \lim_{x \to k\pi^+} \arctan\left(2k+1 - (-1)^k \cos^3 x\right) = \arctan\left(2k+1 - (-1)^k (\cos k\pi)^3\right) =$$

$$= \arctan\left(2k+1 - (-1)^k \left((-1)^k\right)^3\right) = \arctan 2k$$

$\Rightarrow$ IN $x = k\pi$ $y(x)$ È CONTINUA

$$\lim_{x \to k\pi^-} y'(x) = \lim_{x \to k\pi^-} 3\cos^2 x \cdot |\sin x| \cdot \cos^2 y(x) = 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \cos^2\left(\arctan 2k\right) = 0$$

$$\lim_{x \to k\pi^+} y'(x) = \lim_{x \to k\pi^+} 3\cos^2 x \cdot |\sin x| \cdot \cos^2 y(x) = 3 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \cos\left(\arctan 2k\right) = 0$$

$\Rightarrow$ IN $x = k\pi$ $y(x)$ È DERIVABILE CON DERIVATA 0

IL FATTO CHE ANCHE NEI PUNTI DI RACCORDO $y(x)$ SODDISFI L'EQUAZIONE, SEGUE DAL FATTO CHE IN TALI PUNTI SI ANNULLA SIA $y'(x)$ SIA IL SECONDO MEMBRO.

**P.7** TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $y' = \frac{y}{x}$.

SVOLGIMENTO

RISOLVIAMO PRIMA PER $x>0$. SICCOME È LINEARE OMOGENEA DEL I° ORDINE LA SOLUZIONE GENERALE È:

(16) $$y(x) = k\, e^{A(x)} \qquad k \in \mathbb{R}$$

DOVE $A(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $\frac{1}{x}$. PER $x>0$ PRENDIAMO $A(x) = \ln x$, QUINDI:

$$y(x) = k\, e^{\ln x} = kx \qquad k \in \mathbb{R}$$

QUINDI, PER $x>0$, LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE LE SEMIRETTE DEL SEMIPIANO $x>0$, CHE PARTONO DALL'ORIGINE.

IN MODO ANALOGO LE SOL. PER $x<0$ SONO TUTTE E SOLE LE SEMIRETTE CHE PARTONO DALL'ORIGINE E STANNO NEL SEMIPIANO $x<0$.

---

**P.8** TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $y' = y \ln y$

SVOLGIMENTO

IL SECONDO MEMBRO HA SENSO SULL'INSIEME $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y>0\}$. INOLTRE, PER OGNI $(x_0,y_0) \in A$, IL PB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = y \ln y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SODDISFA SEMPRE LE IPOTESI DEL TEO DI ES. E UNICITÀ LOCALE. DI CONSEGUENZA 2 SOL. DELL'EQ. NON POSSONO MAI INTERSECARSI. QUINDI SE TROVIAMO UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI I CUI GRAFICI "COPRONO" TUTTO L'INSIEME A TALE FAMIGLIA È L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI.

TOLTA LA SOL COSTANTE $y_1(x) \equiv 1$, PER TUTTE LE ALTRE POSSO SCRIVERE CHE SODDISFANO:

$$\frac{y'(x)}{y(x)\ln(y(x))} = 1$$

CIOÈ:

$$\left(\ln\left|\ln(y(x))\right|\right)' = (x)'$$

CIOÈ:

$$\ln\left|\ln(y(x))\right| = x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$|\ln(y(x))| = e^c \cdot e^x \qquad c \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

(17) $$\ln(y(x)) = \pm e^c \cdot e^x \qquad c \in \mathbb{R}$$

SE ORA, ALLE (17) AGGIUNGO LA SOL. COSTANTE $=1$, CHE HO GIÀ TROVATO, OTTENGO CHE LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE LE $y(x)$ TALI CHE

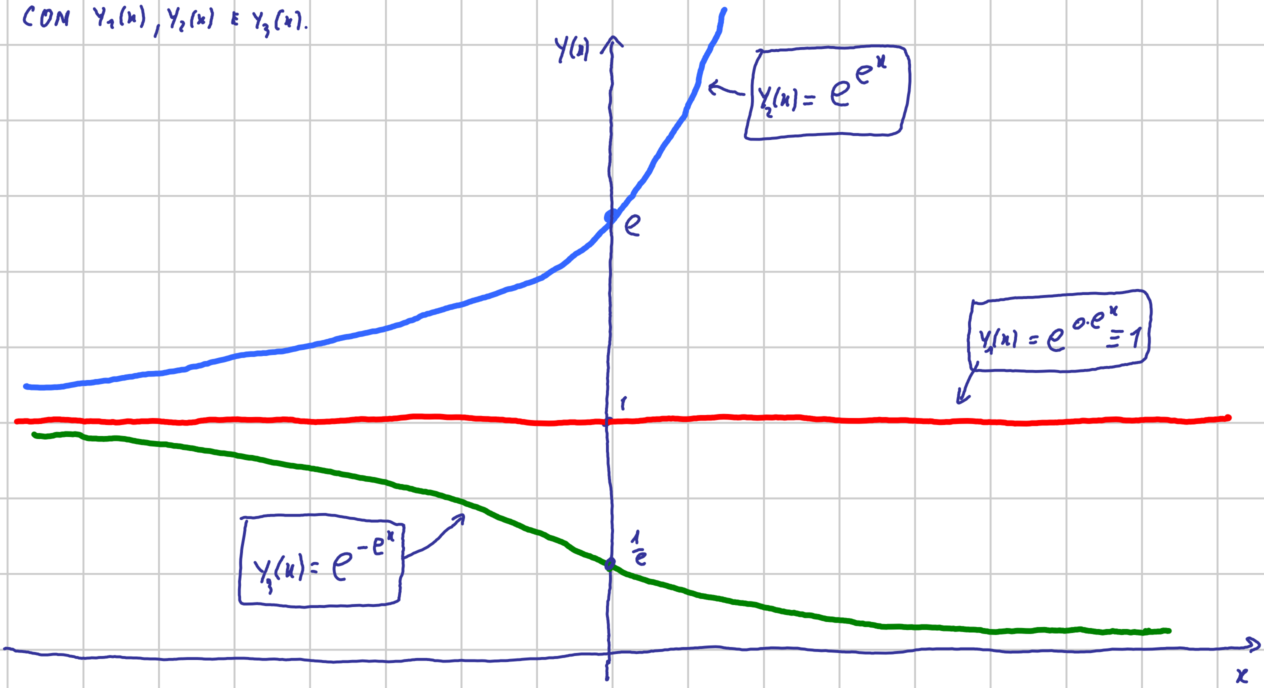
$$\ln(y(x)) = k e^x \quad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

(18) $$y(x) = e^{k e^x} \qquad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

MOSTRIAMO CHE, AL VARIARE DI $k \in \mathbb{R}$ LE $y(x)$ DATE DA (18) RIEMPIONO TUTTO $A$.

PER CAPIRE MEGLIO COSA SUCCEDE DISEGNAMO $y(x)$ PER $k=0$, $k=1$, $k=-1$, CHE INDICHIAMO CON $y_1(x)$, $y_2(x)$ E $y_3(x)$.




OSSERVIAMO CHE OGNI $y(x) = e^{ke^x}$ CON $k>0$ SI PUÒ OTTENERE TRASLANDO LA $y_2(x) = e^{e^x}$. INFATTI, SE $k>0$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $k = e^{x_0}$, QUINDI

$$y(x) = e^{ke^x} = e^{e^{-x_0} \cdot e^x} = e^{e^{x-x_0}} = y_2(x-x_0)$$

ANALOGAMENTE OGNI $y(x) = e^{ke^x}$ CON $k<0$ SI OTTIENE TRASLANDO $y_3(x) = e^{-e^x}$.

INFATTI, SE $k<0$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ T.C. $k = -e^{-x_0}$, QUINDI:

$$y(x) = e^{ke^x} = e^{-e^{-x_0} \cdot e^x} = e^{-e^{x-x_0}} = y_3(x-x_0)$$

SICCOME $y_3(x) \to 0$ PER $x \to +\infty$ E $y_3(x) \to 1$ PER $x \to -\infty$, LE SUE TRASLATE RIEMPIONO

TUTTA LA STRISCIA $\{(x,y) \mid 0<y<1\}$.

ANALOGAMENTE, CON LE TRASLATE DI $y_2(x)$ SI RIEMPIE TUTTO L'INSIEME $A=\{(x,y) \mid y>1\}$.

CON $y_1(x)$ SI COPRE LA RETTA RIMANENTE.

QUINDI CON

$$y(x) = e^{ke^x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

SI COPRE TUTTO IL SEMIPIANO $y>0$. QUINDI SONO TUTTE LE SOLUZIONI.

**NOTA** IL FATTO CHE SE $y(x)$ E SOLUZIONE, ANCHE LE SUE TRASLATE SONO SOLUZIONI, SI POTEVA GIÀ INDOVINARE DAL FATTO CHE AL II° MEMBRO DELL'EQUAZIONE NON COMPARE ESPLICITAMENTE LA $x$ (LE EQUAZIONI CON QUESTA PROPRIETÀ SI DICONO AUTONOME). INFATTI SE $y(x)$ E SOLUZIONE, SE PRENDO $v(x) = y(x-x_0)$ ANCHE $v(x)$ È SOLUZIONE. INFATTI:

$$v'(x) = (y(x-x_0))' = y'(x-x_0) = F(y(x-x_0)) = F(v(x))$$

PERCHÉ $y(x)$ È SOLUZIONE

TUTTO QUESTO NON FUNZIONA SE AL II° MEMBRO DELL'EQUAZIONE COMPARE ESPLICITAMENTE LA $x$.

---

**P.9** TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $y' = e^{-y} \tan x$.

**SVOLGIMENTO**

TROVIAMO TUTTE LE SOLUZIONI IL CUI INTERVALLO MASSIMALE DI DEFINIZIONE STA IN $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

SI HA:

$$y'(x) = e^{-y(x)} \tan x$$

CIOÈ:

$$e^{y(x)} y'(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

CIOÈ:

PERCHÉ SE $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ ALLORA $\cos x>0$

$$\left(e^{y(x)}\right)' = \left(-\ln(\cos x)\right)'$$

CIOÈ:

$$e^{y(x)} = -\ln(\cos x) + c$$

DA CUI SEGUE:

(19)
$$y(x) = \ln\left(c + \ln\frac{1}{\cos x}\right) \qquad c \in \mathbb{R}$$

PER OGNI FISSATO $c$ IL DOMINIO DI $y(x)$ È $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ SE $c > 0$, MENTRE SE $c < 0$ PRENDO COME INTERVALLO DI DEFINIZIONE $\left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos e^{c}\right)$ OPPURE $\left(\arccos e^{c}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ORA, AL VARIARE DI $c \in \mathbb{R}$, LA FAMIGLIA DI TUTTE LE $y(x)$ DATE DA **(19)** RIEMPIE TUTTA LA STRISCIA $A_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$, PERCHÉ $\forall (x_0, y_0) \in A_0$ BASTA PRENDERE $c = e^{y_0} + \ln(\cos x_0)$ E SI OTTIENE

$$y(x) = \ln\left(e^{y_0} + \ln(\cos x_0) + \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right)$$

CHE SODDISFA OVVIAMENTE $y(x_0) = y_0$.

QUINDI **(19)** RICOPRE TUTTA LA STRISCIA $A_0$, QUINDI NON CI SONO ALTRE SOLUZ. IN $A_0$.

A QUESTO PUNTO, PER RIEMPIRE LA STRISCIA $A_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ BASTA PRENDERE TUTTE LE $v(x)$ DEL TIPO

$$v(x) = y(x - k\pi)$$

CON $y(x)$ DATE DALLA **(19)**.

TALI $v(x)$ INFATTI SONO SOLUZIONI PERCHÉ:

$$v'(x) = \left(y(x-k\pi)\right)' = y'(x-k\pi) = e^{-y(x-k\pi)} \tan(x-k\pi) = e^{-v(x)} \tan(x-k\pi) = e^{-v(x)} \tan x$$

PERCHÉ $y(x)$ È SOLUZIONE

---

**P.10** TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI

(20)
$$y' = \frac{x y \ln y^2}{1 + x^4}.$$

SVOLGIMENTO

$F(y) = y \ln y^2$ NON È DEFINITA PER $y = 0$ E SI ANNULLA PER $y = \pm 1$.

INOLTRE OGNI $y_0 \neq 0$ HA UN INTORNO IN CUI $F$ È LIPSCHITZIANA, QUINDI $\forall (x_0, y_0)$, CON $y_0 \neq 0$, IL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x y \ln y^2}{1 + x^4} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

HA UNA E UNA SOLA SOLUZIONE.

QUINDI SE TROVO UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI DI **(20)** CHE RIEMPIE L'INSIEME $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\right\}$, AVRÒ TROVATO TUTTE LE SOLUZIONI.

INTANTO OSSERVIAMO CHE CI SONO LE SOL. COSTANTI $y_1(x) \equiv 1$ E $y_2(x) \equiv -1$.

PER TROVARE OGNI ALTRA SOL. $y(x)$, TALE CHE $y(x) \neq 0, 1, -1$, OSSERVIAMO CHE SODDISFA:

$$\frac{y'(x)}{y(x) \ln|y(x)|} = \frac{2x}{1+x^4}$$

CIOÈ:

$$\Big(\ln\big|\ln|y(x)|\big|\Big)' = \left(\arctan x^2\right)'$$

CIOÈ

$$\ln\big|\ln|y(x)|\big| = \arctan x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

CIOÈ

$$\ln|y(x)| = \pm e^{c} \cdot e^{\arctan x^2} \qquad c \in \mathbb{R}$$

CHE, CON L'AGGIUNTA DELLE SOL. COSTANTI $y_1(x) \equiv 1$ E $y_2(x) \equiv -1$, EQUIVALE A:

$$\ln|y(x)| = k\, e^{\arctan x^2} \qquad k \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

(21) $$y(x) = \pm e^{k e^{\arctan x^2}} \qquad k \in \mathbb{R}$$

TUTTE LE $y(x)$ DEFINITE DA **(21)** SODDISFANO **(20)** PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. INOLTRE RIEMPIONO TUTTO L'INSIEME $A$, PERCHÉ PER OGNI $(x_0, y_0) \in A$ PERCHÉ $y(x)$ CI PASSI, BASTA PRENDERE

$$y(x) = +e^{k \arctan x^2} \qquad \text{CON } k = \ln y_0 \cdot e^{-\arctan x_0^2}$$

SE $y_0 > 0$, MENTRE SE $y_0 < 0$ SI PRENDE

$$y(x) = -e^{k \arctan x} \qquad \text{CON } k = \ln(-y_0) \cdot e^{-\arctan x_0^2}$$

QUINDI LE $y(x)$ DATE DA **(21)** SONO TUTTE E SOLE LE SOLUZIONI DI **(20)**.

---

**P.11** **(21)** SIA $(I, y(x))$ LA SOLUZIONE MASSIMALE DI

$$\begin{cases} y' = x e^{x} \sin\left(y^2 - 4y + 3\right) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

**a** TROVARE $\inf_{x \in I} y(x)$ E $\sup_{x \in I} y(x)$ (E, SE CI SONO, ANCHE $\max_{x \in I} y(x)$ E $\min_{x \in I} y(x)$)

**b** CALCOLARE $\lim_{x \to 0} \frac{y(x) - 2}{x^2}$

## SVOLGIMENTO

NON SI RIESCE A TROVARE ESPLICITAMENTE LA $y(x)$, QUINDI RICAVIAMO LE INFORMAZIONI CHE CI SERVONO DIRETTAMENTE DA **(21)**.

**INFO 1** FINCHÈ $y(x)$ ESISTE SODDISFA $1 < y(x) < 3$.

INFATTI L'EQ. DIFF. PUÒ ESSERE RISCRITTA:

**(22)**
$$y' = x e^x \sin\big((y-1)(y-3)\big)$$

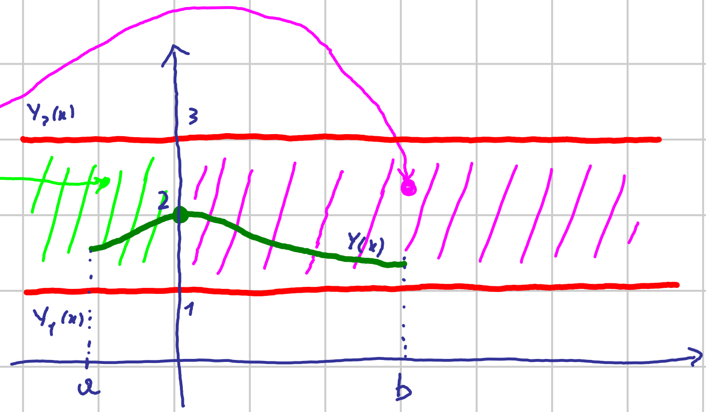
DA CUI SEGUE SUBITO CHE CI SONO 2 SOL. COSTANTI $y_1(x) \equiv 1$ E $y_2(x) \equiv 3$.

QUINDI, VISTO CHE $y(x)$ VALE 2 PER $x=0$ E NON PUÒ MAI INTERSECARE NÈ $y_1(x)$ NÈ $y_2(x)$, FINCHÈ ESISTE RIMARRÀ SEMPRE TRA $y_1(x)$ E $y_2(x)$

**INFO 2** DETTO $I=(a,b)$ L'INTERVALLO DI DEFINIZIONE DI $y(x)$, $y(x)$ CRESCE SU $(a,0]$ E DECRESCE SU $[0,b)$.

BASTA OSSERVARE CHE IL II° MEMBRO DI **(22)** È NEGATIVO NELLA ZONA E POSITIVO NELLA ZONA .

QUINDI, FINCHÈ $y(x)$ ESISTE, $y'(x) > 0$ PER $x<0$ E $y'(x) < 0$ PER $x>0$.




POSSIAMO A QUESTO PUNTO DIRE CHE: $\sup y(x) = \max y(x) = y(0) = 2$

**INFO 3** $b = +\infty$

SE PER ASSURDO FOSSE $b \in \mathbb{R}$, GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $y(x)$, SI AVREBBE:

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = y_0 \in [1,2]$$

PRESA ORA $v(x) \in C^1(b-\delta, b+\delta)$ SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} y' = x e^x \sin(y^2 - 4y + 3) \\ y(b) = y_0 \end{cases}$$

E DEFINITA:

$$u(x) = \begin{cases} y(x) & \text{SE } x \in (a,b) \\ v(x) & \text{SE } x \in [b, b+\delta) \end{cases}$$

MOSTRIAMO CHE $u(x)$ È SOL. DI **(21)** SU TUTTO $(a, b+\delta)$.

A TALE SCOPO, VISTO CHE SIA $Y(x)$ CHE $v(x)$ RISOLVONO L'EQ. DIFF., BASTA MOSTRARE CHE SI RACCORDANO BENE PER $x=b$.

ABBIAMO:

1) $u$ È CONTINUA IN $b$ PERCHÉ: $\lim_{x\to b^-} Y(x) = Y_0 = v(b)$

2) $u$ È DERIVABILE IN $b$ PERCHÉ:

$$\lim_{x\to b^-} y'(x) = \lim_{x\to b^-} x e^x \sin(y^2-4y+3) = b e^b \sin(y_0^2-4y_0+3) = v'(b) = \lim_{x\to b^+} v'(x)$$

QUINDI $u \in C^1((a, b+\delta))$.

IL FATTO CHE $u(x)$ SIA UN PROLUNGAMENTO DI $Y(x)$ CONTRADDICE IL FATTO CHE $((a,b), Y(x))$ SIA MASSIMALE

QUINDI DEVE ESSERE $b=+\infty$.

**INFO 4** $\boxed{\lim_{x\to+\infty} Y(x) = 1}$

GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $Y(x)$ TALE LIMITE ESISTE E SI HA:

$$\lim_{x\to+\infty} Y(x) = \ell \in [1,2]$$

SE PER ASSURDO FOSSE $\ell \neq 1$, CIOÈ $\ell \in (1,2]$, SI AVREBBE:

PERCHÉ SE $\ell \in (1,2]$ ALLORA $\sin(\ell^2-4\ell+3)<0$

$$\lim_{x\to+\infty} Y'(x) = \lim_{x\to+\infty} x e^x \sin(Y^2-4Y+3) = +\infty \cdot \sin(\ell^2-4\ell+3) = -\infty$$

MA ALLORA $\exists\, x_0>0$ T.C. $\forall x>x_0$ $Y'(x)<-1$ E QUINDI, PER $x>x_0$ SI HA:

$$Y(x) = Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} Y'(x)\,dx \leq Y(x_0) + \int_{x_0}^{x} -1\,dx \leq Y(x_0) - (x-x_0) \to -\infty \quad \text{PER } x\to+\infty$$

IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $Y(x)$ È LIMITATA.

QUINDI $\ell = 1$.

POSSIAMO A QUESTO PUNTO DIRE CHE $\inf Y(x) = \lim_{x\to+\infty} Y(x) = 1$ MA $\min Y(x)$ NON ESISTE

PER RISPONDERE A **b** OSSERVIAMO CHE:

$$Y(0) = 2$$

$$Y'(0) = 0 \cdot e^0 \cdot \sin((Y(0))^2 - 4Y(0)+3) = 0$$

PER TROVARE $Y''(0)$, DERIVIAMO AMBO I MEMBRI DELL'EQUAZIONE:

$$Y''(x) = \left(x e^x \sin((Y(x))^2 - 4Y(x)+3)\right)' =$$

$$= e^x \sin((Y(x))^2-4Y(x)+3) + x e^x \sin((Y(x))^2-4Y(x)+3) + x e^x \cdot \cos((Y(x))^2-4Y(x)+3)\cdot Y'(x)$$

QUINDI:

$$y''(0) = e^0 \cdot \sin(2^2 - 4\cdot 2 + 3) + 0 \cdot e^0 \sin(2^2 - 4\cdot 2+3) + 0 \cdot e^0 \cdot \cos(2^2 - 4 \cdot 2 + 3) \cdot 0 = -\sin 1$$

DUNQUE ABBIAMO TROVATO:

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \quad \text{E} \quad y''(0) = -\sin 1$$

QUINDI:

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)-2}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{y'(x)}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{y''(x)}{2} = \frac{y''(0)}{2} = -\frac{1}{2}\sin 1$$

---

**P.12** DEFINIAMO $F(y) = \begin{cases} -y \ln y & \text{SE } y > 0 \\ 0 & \text{SE } y \leq 0 \end{cases}$ E CONSIDERIAMO IL PR. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

**a** MOSTRARE CHE F NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0.

**b** DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE IL PR. DI CAUCHY ASSEGNATO HA UNA SOLA SOL. OPPURE NO

## SVOLGIMENTO

**a** SI OSSERVI CHE PER $y = 0$ $F(y)$ È CONTINUA PERCHÉ:

$$\lim_{y\to 0^+} F(y) = \lim_{y \to 0^+} -y \ln y = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 = F(0)$$

TUTTAVIA NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0, VISTO CHE:

$$\lim_{y\to 0} \frac{F(y) - F(0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y\ln y}{y} = \lim_{y \to 0}(-\ln y) = +\infty.$$

**b** L'UNICA SOLUZIONE DI

(23) $$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

È LA SOL. COSTANTE $y_1(x) \equiv 0$.

PER DIMOSTRARLO PERÒ NON POSSIAMO INVOCARE IL TEO. ES. E UNICITÀ LOCALE, CHE NON VALE NEI PUNTI DELL'ASSE $x$.

TUTTAVIA SAPPIAMO CHE

1) NEI PUNTI $(x_0, y_0)$ TALI CHE $y_0 \neq 0$ IL PB. DI CAUCHY

(24) $$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SODDISFA LE IPOTESI DEL TEO. DI ESISTENZA E UNICITÀ

2) SE $y_0 < 0$ LA SOL. DI (24) È LA FUNZIONE COSTANTE $y(x) = y_0$

3) SE $y_0 > 0$ LA SOL. DI (24) È GIÀ STATA TROVATA NEL $\boxed{P.8}$ ED È DATA DA:

$$y(x) = y_0^{e^{x-x_0}} \tag{25}$$

SI NOTI CHE NESSUNA DELLE SOLUZIONI DEI PUNTI 2) E 3) SODDISFA $y(0)=0$.

MOSTRIAMO ORA CHE SE $y(x)$ È SOL. DI (23) NON PUÒ MAI ESSERE STRETTAMENTE POSITIVA.

A TALE SCOPO, $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$, SIA $y_n(x)$ LA SOL DI (24) CON $x_0=0$ E $y_0=\frac{1}{n}$. GRAZIE A (25) SAPPIAMO CHE:

$$y_n(x) = \left(\frac{1}{n}\right)^{e^x}$$

È IMMEDIATO VERIFICARE CHE OGNI $y_n$ È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$ E CHE

$$y_n \to 0 \quad \text{PUNTUALMENTE SU } \mathbb{R}.$$

INOLTRE, SICCOME $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ IL GRAFICO DI $y_n(x)$ STA TUTTO NEL SEMIPIANO $y>0$, IL TEO. DI ESISTENZA E UNICITÀ MI GARANTISCE CHE OGNI ALTRA SOLUZIONE NON PUÒ INTERSECARLA.

IN PARTICOLARE OGNI EVENTUALE SOLUZIONE $y(x)$ DI (23), VISTO CHE $y(0)=0<\frac{1}{n}=y_n(0)$ PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, DOVRÀ ESSERE ANCHE:

$$y(x) < y_n(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$$

DI CONSEGUENZA $\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$y(x) \le \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n(x) = \lim_{n \to +\infty} y_n(x) = 0$$

QUESTO DIMOSTRA CHE OGNI EVENTUALE SOLUZIONE $y(x)$ DI (23) NON PUÒ ASSUMERE VALORI POSITIVI.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE $y(x)$ NON PUÒ ASSUMERE VALORI NEGATIVI USANDO LE SOL. DEL PUNTO 2) AL POSTO DI QUELLE DEL PUNTO 3).

QUINDI L'UNICA SOLUZIONE DI (23) È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA.

# Problemi aggiuntivi per $\boxed{\text{EXE } 9}$

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy :

**1**
$$\begin{cases} y' = (1-2e^{-y})\cdot 2x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
NEI CASI: $y_0 = \ln 2$, $y_0 = \ln 4$, $y_0 = 1$

**2**
$$\begin{cases} y' = \left(y - \frac{1}{y}\right) x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
NEI CASI: $y_0 = 2$, $y_0 = -2$, $y_0 = \sqrt{1-\frac{1}{e}}$

**3**
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{(1-x)e^y} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$
NEI CASI: $x_0 = e+1$, $x_0 = 0$

**4**
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x \sin^3 y}{x^2+2x+2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
NEI CASI: $y_0 = -3\pi$, $\boxed{y_0 = \frac{\pi}{2}}$

ATTENZIONE! QUESTO È MOLTO LUNGO

**5**
$$\begin{cases} y' = -\pi \cdot \dfrac{y^2+1}{(1-x)^2} \\ y(x_0) = 1 \end{cases}$$
NEI CASI: $x_0 = 5$, $x_0 = \frac{9}{5}$

Rispondere alle seguenti domande:

**6** DETTA $y(x)$ LA SOLUZIONE DI **4** NEL CASO $y_0 = \frac{\pi}{2}$, SENZA TROVARE ESPLICITAMENTE $y(x)$ DIRE QUANTO VALGONO $\lim_{x\to\pm\infty} y(x)$. TROVARE INOLTRE IL POL. DI TAYLOR DI ORDINE 2 DI $y(x)$ IN $x_0 = 0$.

**7** SIA $y(x)$ LA SOLUZIONE DI : $\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$. TROVARE $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ E $\lim_{x\to+\infty} y'(x)$.

COSA SUCCEDE PER $x < 1$?

# Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 10



13 Maggio 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

RISOLVERE I SEGUENTI PROB. DI CAUCHY:

**1** $\begin{cases} y' + \dfrac{1-3x^3}{x}\, y = 3x \\ y(1) = -\dfrac{1+e}{e} \end{cases}$

**2** $\begin{cases} y' + 2\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, y = 1 \\ y(\ln 2) = \dfrac{8}{25}\ln 2 \end{cases}$

**3** $\begin{cases} y' - 2y\ln x = 2x^{2x} \\ y(1) = 1 - \frac{3}{4}e^2 \end{cases}$

**4** $\begin{cases} y' - |y| = x \\ y(1) = 0 \end{cases}$

TROVARE LA SOL. GENERALE DELLE SEGUENTI EQ.

**5** $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$

**6** $y''' - y = 0$

**7** $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

**8** $y^{(6)} + 4y'' = 0$

**9** $y^{(8)} + 2y^{(6)} + 3y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

PER CIASCUNA DELLE SEGUENTI FUNZIONI TROVARE (SE ESISTE) UN'EQ. LINEARE OMOGENEA A COEFF. COSTANTI REALI DI ORDINE MINIMO DI CUI SIA SOLUZIONE:

**10** $y(x) = e^{2x} + e^{3x}$

**11** $y(x) = (x^2 + x)\cdot \cos x$

**12** $y(x) = x^2 + x + \cos x$

**13** $y(x) = e^x \cos 2x$

**14** $y(x) = e^x + \cos 2x$

**15** $y(x) = 2\cos^2 x$

RISOLVERE L'EQUAZIONE $y''' - 2y'' + y' = b(x)$ CON I SEGUENTI $b(x)$:

**16** $b(x) = e^{3x}$

**17** $b(x) = \cos x$

**18** $b(x) = e^x$

**19** $b(x) = x^3$

**20** $b(x) = 4x^3 + 5\cos x$

RISOLVERE I SEGUENTI PROBLEMI DI CAUCHY:

**21** $\begin{cases} y'' + y' = \dfrac{2e^x}{1+e^{2x}} \\ y(0) = \ln 2 \\ y'(0) = -\ln 2 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x} \\ y(1) = -e \\ y'(1) = -e \end{cases}$

# Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 5

Titolo nota

Prova simulata su: Elementi di EquaDiff. - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

RISOLVERE I SEGUENTI PROBLEMI DI CAUCHY

**1** $\begin{cases} y' = \dfrac{e^{x-y}}{2-e^x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

**2** $\begin{cases} y' + y \ln x = x^{1-x} \\ y(1) = -2 - \frac{1}{e} \end{cases}$

**3** $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \dfrac{2 \ln x}{x e^x} \\ y(1) = \frac{1}{e} \\ y'(1) = -\frac{2}{e} \end{cases}$

**4** DATA L'EQUAZIONE DIFF.

$$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = e^x - \sin x + 2\cos^2 x$$

**a** TROVARE LA SOL GENERALE

**b** QUALI SOLUZIONI SONO LIMITATE SU $(-\infty, 0]$ ?

**5** DATA L'EQUAZIONE DIFF.

$$y^{(8)} + 81 y^{(5)} + 112 y'' + 5y' + y = e^{-x}$$

**a** TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $y_0(x)$.

**NOTE PER L'AUTOVALUTAZIONE**

1) I PROBLEMI CON L'ASTERISCO SONO UN PO' PIÙ DIFFICILI DI QUELLI CHE POTREI DARE IN UNA PROVA D'ESAME.
2) IL TEMPO STIMATO PER SVOLGERE QUESTA PROVA È 4 ORE.
3) SI ARRIVA A 30 SVOLGENDO TUTTE LE PARTI SENZA ASTERISCO.
4) SI ARRIVA A 25 FACENDO I PRIMI 6 PROBLEMI.

**6** ESISTE UNA EQ. LINEARE A COEFF. COSTANTI DI ORDINE 11 OMOGENEA TALE CHE TUTTE LE SUE SOLUZIONI SONO LIMITATE ?

**7** (*) TROVARE UN'EQ. DIFF. DEL TIPO $y' = R(y)$ AVENTE UNA SOLUZIONE $y(x)$ DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$ E TALE CHE $y(x) = -1$ PER OGNI $x \leq 1$ E $y(x) = 1$ PER OGNI $x \geq 2$.

**8** SIA $y(x)$ LA SOL. DEL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = \dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

**a** MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE A TUTTO $\mathbb{R}$.

**b** TROVARE $\ell \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \ell$.

**c** DIRE SE $\lim_{x \to +\infty} y(x) = \frac{7}{6}\pi$ OPPURE NO.

**d** (*) DETTO $\ell$ IL LIMITE TROVATO AL PUNTO **b**, DIRE PER QUALI $k$ SI HA $|y(x) - \ell| = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ PER $x \to -\infty$.

# Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 5

Titolo nota

Prova simulata su: Elementi di EquaDiff. - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

# SOLUZIONI

QUESTA È UNA BOZZA CHE NON HO RICONTROLLATO ABBASTANZA E QUINDI POTREBBE CONTENERE DEGLI ERRORI. RINGRAZIO IN ANTICIPO CHI ME LI SEGNALERÀ

**1** TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY: $\begin{cases} y' = \dfrac{e^{x-y}}{2-e^x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

SVOLGIMENTO

VISTO CHE $e^{-y} \neq 0$ PER OGNI $y \in \mathbb{R}$, $y(x)$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE SE E SOLO SE:

$$e^{y(x)} y'(x) = \frac{e^x}{2-e^x}$$

CIOÈ:

$$\left(e^{y(x)}\right)' = \left(-\ln|e^x - 2|\right)'$$

CIOÈ

(1) $$e^{y(x)} = -\ln|e^x-2| + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

POICHÉ L'EQUADIFF. HA SENSO SOLO PER $x \neq \ln 2$ E IL DATO INIZIALE DEL PROB. DI CAUCHY È DATO PER $x=0$, LA SOLUZIONE CERCATA $(I, y(x))$ DEVE AVERE $I \subset (-\infty, \ln 2)$.

QUINDI LA (1), PER $x < \ln 2$, DIVENTA:

$$e^{y(x)} = -\ln(2-e^x) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$y(x) = \ln\left(C - \ln(2-e^x)\right) \qquad C \in \mathbb{R}$$

PERCHÉ SIA $y(0)=1$, BISOGNA CHE:

$$1 = \ln\left(c - \ln(2-e^0)\right)$$

CIOÈ $c = e$. QUINDI LA SOL. CERCATA È:

$$y(x) = \ln\left(e - \ln(2-e^x)\right)$$

IL CUI INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA È $(-\infty, \ln 2)$.

**2** TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:
$$\begin{cases} y' + y \ln x = x^{1-x} \\ y(1) = -2 - \frac{1}{e} \end{cases}$$

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

L'OMOGENEA ASSOCIATA:

$$y' + y \cdot \ln x = 0$$

HA SOLUZIONE GENERALE:

(2) $$y(x) = c\, e^{-A(x)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

DOVE:

$$A(x) = \int \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x$$

QUINDI LA **(2)** DIVENTA:

(3) $$y(x) = c\, e^{-x \ln x + x} = c\, x^{-x} \cdot e^{x} \qquad c \in \mathbb{R}$$

PER TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ DELLA NON OMOGENEA USIAMO IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI, CERCHIAMO DUNQUE $y_0(x)$ DELLA FORMA:

(4) $$y_0(x) = c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x}$$

SOSTITUENDO $y_0(x)$ NELL'EQUAZIONE SI HA:

(5) $$\left( c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x} \right)' + c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x} \cdot \ln x = x^{1-x}$$

MA SICCOME:

$$\left( c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x} \right)' = c'(x) \cdot x^{-x} \cdot e^{x} + c(x) \cdot \left( e^{x - x \ln x} \right)' =$$

$$= c'(x) \cdot x^{-x} e^{x} + c(x) \cdot e^{x - x \ln x} \cdot \left( 1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} \right) =$$

$$= c'(x) \cdot x^{-x} e^{x} - c(x)\, x^{-x} \cdot e^{x} \cdot \ln x$$

LA **(5)** DIVENTA:

$$c'(x)\, x^{-x} e^{x} - \cancel{c(x)\, x^{-x} e^{x} \ln x} + \cancel{c(x)\, x^{-x} e^{x} \ln x} = x^{1-x}$$

DA CUI SEGUE:

$$c'(x) \cdot x^{-x} \cdot e^{x} = x^{1-x}$$

CIOÈ:

$$C'(x) = x e^{-x}$$

QUINDI BASTA PRENDERE:

$$C(x) = \int x e^{-x} dx = \int x (-e^{-x})' dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} = -(x+1) e^{-x}$$

QUINDI LA SOL. PARTICOLARE CERCATA **(6)** È:

$$y_0(x) = -(x+1) e^{-x} \cdot x^{-x} \cdot e^{x} = -(x+1) x^{-x}$$

QUINDI LA SOL. GENERALE DELL'EQUAZIONE È

$$y(x) = -(x+1) x^{x} + C x^{-x} e^{x} \qquad C \in \mathbb{R}$$

PER SODDISFARE IL DATO INIZIALE $y(1) = -2 - \frac{1}{e}$, BISOGNA CHE SIA:

$$-2 - \frac{1}{e} = -(1+1) 1^{1} + C \cdot 1^{-1} \cdot e^{1}$$

DA CUI SEGUE $C = -\frac{1}{e^2}$. QUINDI LA SOL DEL PROB. DI CAUCHY È:

$$y(x) = -(x+1) x^{x} - x^{x} e^{x-2}$$

CHE HA COME INTERVALLO MASSIMALE DI PROLUNGABILITÀ $(0, +\infty)$.

---

**3** TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:
$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{2 \ln x}{x e^{x}} \\ y(1) = \frac{1}{e} \\ y'(1) = -\frac{2}{e} \end{cases}$$

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

L'OMOGENEA ASSOCIATA È:

**(6)** $$y'' + 2y' + y = 0$$

IL CUI POL. CARATTERISTICO È

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

QUINDI LA SOL GENERALE DI **(6)** È:

$$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x}$$

QUINDI, SE VOGLIO USARE IL METODO DELLA VAR. DELLE COSTANTI PER TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ DELLA NON OMOGENEA, AVRÒ CHE $y_0(x)$ È DELLA FORMA

**(7)** $$y_0(x) = \alpha(x) e^{-x} + \beta(x) \cdot x e^{-x}$$

CON $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ TALI CHE:

$$\begin{cases} e^{-x}\alpha'(x) + x e^{-x}\beta'(x) = 0 \\ -e^{-x}\alpha'(x) + (1-x)e^{-x}\beta'(x) = \dfrac{2\ln x}{x e^{x}} \end{cases}$$

CIOÈ TALI CHE:
$$\begin{cases} \beta'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} \\ \alpha'(x) = -2\ln x \end{cases}$$

QUINDI UNA POSSIBILE SCELTA PER $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ È:

$$\alpha(x) = \int -2\ln x \, dx = -2\int (x)'\ln x = -2x\ln x + 2x$$

$$\beta(x) = \int \frac{2\ln x}{x} = \ln^2 x$$

QUINDI LA **(7)** È:

$$y_0(x) = -2x(\ln x + 1)e^{-x} + \ln^2 x \cdot x e^{-x} = (\ln^2 x - 2\ln x - 2)\, x e^{-x}$$

DI CONSEGUENZA, LA SOL GENERALE DELLA NON OMOGENEA È:

$$y(x) = (\ln^2 x - 2\ln x \boxed{-2})\, x e^{-x} + \alpha e^{-x} + \beta x e^{-x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

SI PUÒ ANCHE TOGLIERE, INGLOBANDOLO IN $\beta$

CERCHIAMO ORA $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ IN MODO DA SODDISFARE I DATI INIZIALI. SI HA:

$$y'(x) = (2\ln x - 2)e^{-x} + (\ln^2 x - 2\ln x)(e^{-x} - xe^{-x}) - \alpha e^{-x} + \beta(e^{-x} - xe^{-x})$$

QUINDI LE CONDIZIONI:
$$\begin{cases} y(1) = \frac{1}{e} \\ y'(1) = -\frac{2}{e} \end{cases}$$

DIVENTANO
$$\begin{cases} \frac{\alpha}{e} + \frac{\beta}{e} = \frac{1}{e} \\ -\frac{2}{e} - \frac{\alpha}{e} + 0\cdot\beta = -\frac{2}{e} \end{cases}$$

CIOÈ
$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

QUINDI LA $y(x)$ CERCATA È

$$y(x) = (\ln^2 x - 2\ln x + 1)\, x e^{-x}$$

**4** DATA L'EQUAZIONE DIFF.

$$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = e^{x} - \sin x + 2\cos^2 x$$

**a** TROVARE LA SOL GENERALE

**b** QUALI SOLUZIONI SONO LIMITATE SU $(-\infty, 0]$ ?

SVOLGIMENTO

**a** PRIMA SCRIVIAMO MEGLIO IL SECONDO MEMBRO, OSSERVANDO CHE

$$2\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = \cos(2x) + 1$$

QUINDI L'EQUAZIONE DIVENTA:

**(8)** $$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = e^{x} - \sin x + \cos 2x + 1$$

LA SUA OMOGENEA ASSOCIATA È:

(9) $$y^{(5)}+y^{(4)}-y''-y'=0$$

CHE HA POL. CARATTERISTICO DATO DA:

$$p(\lambda)=\lambda^5+\lambda^4-\lambda^2-\lambda=\lambda^4(\lambda+1)-\lambda(\lambda+1)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

QUINDI LE SUE RADICI SONO

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=-1 \quad \lambda_4=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \lambda_5=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

DA CUI SEGUE CHE LA SOL. GENERALE DI (9) È:

$$y(x)=\alpha+\beta e^x+\gamma e^{-x}+\delta e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\rho e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta,\rho\in\mathbb{R}$$

CERCHIAMO ORA UNA SOL. PARTICOLARE $y_1(x)$ DELL'EQ. NON OMOGENEA

(10) $$y^{(5)}+y^{(4)}-y''-y'=e^x$$

VISTO CHE $\lambda=1$ COMPARE TRA LE RADICI DI $p(\lambda)$ CON MOLTEPLICITÀ 1, CERCHIAMO $y_1(x)$ DELLA FORMA:

(11) $$y_1(x)=\alpha x e^x$$

PER SOSTITUIRE (11) IN (10), CALCOLIAMONE LE DERIVATE:

$$y_1'(x)=\alpha(x+1)e^x$$
$$y_1''(x)=\alpha(x+2)e^x$$
$$\vdots$$
$$y_1^{(4)}(x)=\alpha(x+4)e^x$$
$$y_1^{(5)}(x)=\alpha(x+5)e^x$$

SOSTITUENDO IN (10) SI OTTIENE:

$$\alpha(\cancel{x}+5)e^x+\alpha(\cancel{x}+4)e^x-\alpha(\cancel{x}+2)e^x-\alpha(\cancel{x}+1)e^x=e^x$$

CIOÈ:

$$6\alpha e^x=e^x$$

DA CUI SEGUE $\alpha=\frac{1}{6}$, E QUINDI

(12) $$y_1(x)=\frac{1}{6}xe^x$$

ANALOGAMENTE SIA $y_2(x)$ LA SOL. DI

(13) $$y^{(5)}+y^{(4)}-y''-y'=-\sin x$$

POICHÉ $\lambda=i$ NON È TRA LE RADICI DI $p(\lambda)$, CERCO $y_2(x)$ DELLA FORMA:

$$y_2(x)=A\cos x+B\sin x$$

ABBIAMO:

$$Y_2'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$Y_2''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

$$Y_2'''(x) = A\sin x - B\cos x$$

$$Y_2^{(4)}(x) = A\cos x + B\sin x = Y_2(x)$$

$$Y_2^{(5)}(x) = Y_2'(x)$$

QUINDI, SOSTITUENDO IN **(13)** $y^{(5)}$ E $-y'$ SI CANCELLANO E SI OTTIENE:

$$A\cos x + B\sin x + A\cos x + B\sin x = -\sin x$$

CIOÈ:

$$2A\cos x + 2B\sin x = -\sin x$$

DA CUI SEGUE $A = 0$ E $B = -\frac{1}{2}$, QUINDI:

$$Y_2(x) = -\frac{1}{2}\sin x \tag{14}$$

CERCHIAMO ORA LA SOL. PARTICOLARE $Y_3(x)$ DI:

$$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = \cos(2x) \tag{15}$$

SICCOME $\lambda = 2i$ NON È RADICE DI $P(\lambda)$, CERCO $Y_3(x)$ DELLA FORMA:

$$Y_3(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

ABBIAMO:

$$Y_3'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$Y_3''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x = -4\,Y_3(x)$$

$$Y_3'''(x) = -4\,Y_3'(x)$$

$$Y_3^{(4)}(x) = -4\,Y_3''(x) = 16\,Y_3(x)$$

$$Y_3^{(5)}(x) = 16\,Y_3'(x)$$

QUINDI, SOSTITUENDO IN **(15)**, SI HA:

$$-32A\sin 2x + 32B\cos 2x + 16A\cos 2x + 16B\sin 2x + 4A\cos 2x + 4B\sin 2x + 2A\sin 2x - 2B\cos 2x = \cos 2x$$

CIOÈ:

$$(-30A + 20B)\sin 2x + (30B + 20A)\cos 2x = \cos 2x$$

DA CUI SEGUE:

$$\begin{cases} -30A + 20B = 0 \\ 30B + 20A = 1 \end{cases}$$

CIOÈ $A = \frac{1}{65}$ E $B = \frac{3}{130}$ E, DI CONSEGUENZA:

**(16)**
$$y_3(x) = \frac{1}{65}\cos 2x + \frac{3}{130}\sin 2x$$

INFINE TROVIAMO LA SOL. PARTICOLARE $y_4(x)$ DI

**(17)**
$$y^{(5)} + y^{(4)} - y'' - y' = 1$$

VISTO CHE $\lambda = 0$ È RADICE DI $P(\lambda)$ CON MOLTEPLICITÀ 1, CERCHIAMO $y_4(x)$ DELLA FORMA:

$$y_4(x) = Cx.$$

SOSTITUENDO IN **(17)** SI OTTIENE:

$$-C = 1$$

QUINDI:

$$y_4(x) = -x$$

LA SOL. GENERALE DELL'EQ. NON OMOGENEA INIZIALE È:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + \alpha + \beta e^{x} + \gamma e^{-x} + \delta e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \rho e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$y(x) = \frac{1}{6}xe^{x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{65}\cos 2x + \frac{3}{130}\sin 2x - x + \alpha + \beta e^{x} + \gamma e^{-x} + \delta e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \rho e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

CON $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho \in \mathbb{R}$.

**b** NON C'È ALCUN MODO DI SCEGLIERE $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho \in \mathbb{R}$ IN MODO CHE $y(x)$ SIA LIMITATA SU $(-\infty, 0]$. INFATTI:

$$y(x) = -x + \gamma e^{-x} + \delta e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \rho e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \boxed{\text{PARTE SEMPRE LIMITATA SU } [-\infty, 0]}$$

SE TALE $y(x)$ RIMANE LIMITATA PER $x \to -\infty$ DEVE ESSERE $\gamma = 0$, ALTRIMENTI IL TERMINE DOMINANTE SAREBBE $\gamma e^{-x}$ E QUINDI $|y(x)| \to +\infty$ PER $x \to -\infty$.

A QUESTO PUNTO DEVE ESSERE ANCHE $\delta = 0$, ALTRIMENTI PRESO $x_n = -\frac{4\pi n}{\sqrt{3}}$ SI AVREBBE:

$$y(x_n) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot n + \delta e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot n} + \rho \cdot 0 + \boxed{\text{PARTE LIMITATA SU } (-\infty, 0]}$$

QUINDI SE NON FOSSE $\delta = 0$, PER $n \to +\infty$ SI AVREBBE $x_n \to -\infty$ MA $|y(x_n)| \to +\infty$.

ANALOGAMENTE SI MOSTRA CHE DEVE ESSERE ANCHE $\rho = 0$. QUINDI, PER ESSERE LIMITATA, DOVREBBE ESSERE:

$$y(x) = -x + \boxed{\text{PARTE LIMITATA SU } (-\infty, x]}$$

CHE PERÒ NON È LIMITATA A CAUSA DEL TERMINE $-x$, CHE RIMANE.

**5** DATA L'EQUAZIONE DIFF.

$$y^{(8)}+81y^{(5)}+112y''+5y'+y=e^{-x}$$

**a** TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $y_0(x)$.

**SVOLGIMENTO**

STAVOLTA IL POL. CARATTERISTICO È

$$p(\lambda)=\lambda^8+81\lambda^5+112\lambda^2+5\lambda+1$$

E NON È FACILE TROVARNE TUTTE LE RADICI, QUINDI NON SIAMO IN GRADO DI DETERMINARE LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA. TUTTAVIA, PER TROVARE UNA SOL. PARTIC. DELLA NON OMOGENEA COL METODO DEGLI ANNICHILATORI, NON C'È DAVVERO BISOGNO DI CONOSCERE TUTTE LE RADICI DI $p(\lambda)$. NEL NOSTRO CASO, VISTO CHE IL II° MEMBRO È $e^{-x}$, BASTA INFATTI CONTROLLARE CHE $\lambda=-1$ NON È RADICE DI $p(\lambda)$ PER POTER ESSERE SICURI CHE C'È UNA SOL. PARTICOLARE DEL TIPO:

(18) $$y_0(x)=c\,e^{-x}$$

IL CONTROLLO CHE $\lambda=-1$ NON È RADICE DI $p(\lambda)$ È IMMEDIATO, VISTO CHE $p(-1)=28\neq 0$

QUINDI POSSIAMO CERCARE UNA SOL. DI TIPO **(18)** SOSTITUENDO NELLA NON OMOGENEA:

$$(ce^{-x})^{(8)}+81(ce^{-x})^{(5)}+112(ce^{-x})''+5(ce^{-x})'+ce^{-x}=e^{-x}$$

CHE EQUIVALE A:

$$ce^{-x}-81ce^{-x}+112ce^{-x}-5ce^{-x}+ce^{-x}=e^{-x}$$

CIOÈ A:

$$28c\,e^{-x}=e^{-x}$$

DA CUI SEGUE: $c=\frac{1}{28}$.

QUINDI UNA SOL PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA È:

$$y_0(x)=\frac{1}{28}e^{-x}$$

---

**6** ESISTE UNA EQ. LINEARE A COEFF. COSTANTI E REALI, DI ORDINE 11, OMOGENEA TALE CHE TUTTE LE SUE SOLUZIONI SONO LIMITATE?

**SVOLGIMENTO**

LA RISPOSTA È SI: BASTA FARE IN MODO CHE IL POL. CARATTERISTICO ABBIA 11 RADICI TUTTE DIVERSE E CON PARTE REALE ZERO. AD ESEMPIO:

$$P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda^2+4)(\lambda^2+9)(\lambda^2+16)(\lambda^2+25)\cdot\lambda$$

L'EQ. OMOGENEA CHE HA $P(\lambda)$ COME POL. CARATTERISTICO, HA COME BASE PER LO SPAZIO DELLE SOL. LA SEGUENTE.

$$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 4x, \cos 5x, \sin 5x\}$$

CHE SONO 11 FUNZIONI, TUTTE LIMITATE, QUINDI OGNI LORO COMB. LINEARE È LIMITATA.

---

**7** TROVARE UN'EQ. DIFF. DEL TIPO $y' = f(y)$ AVENTE UNA SOLUZIONE $y(x)$ DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$ E TALE CHE $y(x) = -1$ PER OGNI $x \leq 1$ E $y(x) = 1$ PER OGNI $x \geq 2$.

SVOLGIMENTO

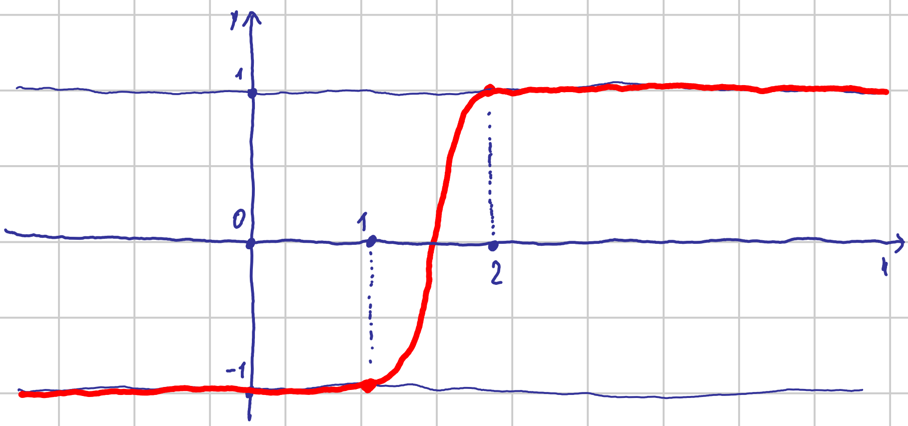
UN'EQUAZIONE CHE SODDISFA LE CONDIZIONI RICHIESTE È

**(19)** $$y' = \pi\sqrt{1-y^2}$$

CHE HA, TRA LE SUE SOLUZIONI:

**(20)** $$y(x) = \begin{cases} -1 & \text{PER } x \leq 1 \\ \sin\left(\pi\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\right) & \text{PER } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{PER } x \geq 2 \end{cases}$$

CHE VEDIAMO IN FIGURA:




PER DIMOSTRARE CHE LA NOSTRA AFFERMAZIONE È CORRETTA È SUFFICIENTE VERIFICARE CHE LA **(20)** È DI CLASSE $C^1$ E CHE SODDISFA LA **(19)**. QUESTO COMPLETA LO SVOLGIMENTO.

SE PERÒ VOGLIAMO CAPIRE IN CHE MODO SI ARRIVI A DECIDERE DI PRENDERE **(19)**, PUÒ ESSERE UTILE FARE ALCUNE OSSERVAZIONI:

**OSS. 1** VISTO CHE PER $x \geq 2$ C'È LA SOL. COSTANTE $y_1(x) = 1$ SIGNIFICA CHE $f(1) = 0$ E, ANALOGAMENTE, DEVE ESSERE $f(-1) = 0$ PERCHÉ PER $x < 1$ C'È LA SOL COSTANTE $y_2(x) = -1$

**OSS. 2** CI SERVE CHE PER $y=-1$ E $y=1$ NON VALGA IL TEOREMA DI UNICITÀ PERCHÈ DEVE ESSERCI UNA SOLUZIONE CHE "RACCORDA" LE 2 SOL. COSTANTI: NEI PUNTI DI "RACCORDO" NON CI DEVE ESSERE UNICITÀ DELLA SOLUZIONE. CIÒ VUOL DIRE CHE $f(y)$ NON DEVE ESSERE LOCALMENTE LIPSCHITZIANA PER $y=1$ E PER $y=-1$.

RIASSUMENDO: $f(y)$ DEVE AVERE LE PROPRIETÀ:

**(a)** $f(1)=0=f(-1)$

**(b)** $f$ NON È LOCALMENTE LIPSCHITZIANA IN $y=1$ E $y=-1$.

LA PIÙ SEMPLICE FUNZIONE CHE SODDISFA **(a)** È $f(y)=y^2-1$, MA SE VOGLIAMO CHE SODDISFI ANCHE **(b)** DOBBIAMO FARE IN MODO CHE, QUANDO INTERSECA L'ASSE $x$, ABBIA PENDENZA INFINITA. PER QUESTO PRENDIAMO $f(y)=\sqrt{|y^2-1|}$ CHE, SE $-1\le y\le 1$ SI SCRIVE $f(y)=\sqrt{1-y^2}$

A QUESTO PUNTO, CERCANDO LE SOLUZIONI DI

**(21)**
$$y'=\sqrt{1-y^2}$$

NELLA ZONA $-1<y<1$, TROVO CHE SONO TUTTE E SOLE LE TRASLATE ORIZZONTALI DI:

**(22)**
$$y(x)=\sin x \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

MI ACCORGO ALLORA CHE LE TRASLATE DI **(22)** VANNO "QUASI" BENE: PER PASSARE DA QUOTA $-1$ A QUOTA $1$, LA **(22)** HA BISOGNO CHE LA L'INCREMENTO DI $x$ SIA $\Delta x=\pi$, MENTRE A NOI SERVE CHE ACCADA QUANDO $x$ PASSA DA $x=1$ A $x=2$, CIOÈ CON $\Delta x=1$.

INSOMMA CI SERVIREBBE CHE, AL POSTO DI **(22)**, LE SOLUZIONI FOSSERO TUTTE E SOLE LE TRASLATE ORIZZONTALI DI:

**(23)**
$$y(x)=\sin \pi x \qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

QUINDI DOBBIAMO AGGIUSTARE L'EQUAZIONE **(21)** NEL MODO SEGUENTE:

**(24)**
$$y'=\pi\sqrt{1-y^2}$$

CHE HA APPUNTO **(23)** COME SOLUZIONE.

QUESTO SPIEGA IL MOTIVO DELLA SCELTA **(19)**.

---

**8** SIA $y(x)$ LA SOL. DEL PROB. DI CAUCHY

**(25)**
$$\begin{cases} y'=\dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}\ln\left(\dfrac{3}{2}+\sin y\right)\\ y(0)=0\end{cases}$$

**a** MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE A TUTTO $\mathbb{R}$.

**b** TROVARE $\ell \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \ell$.

**c** DIRE SE $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{7}{6}\pi$ OPPURE NO.

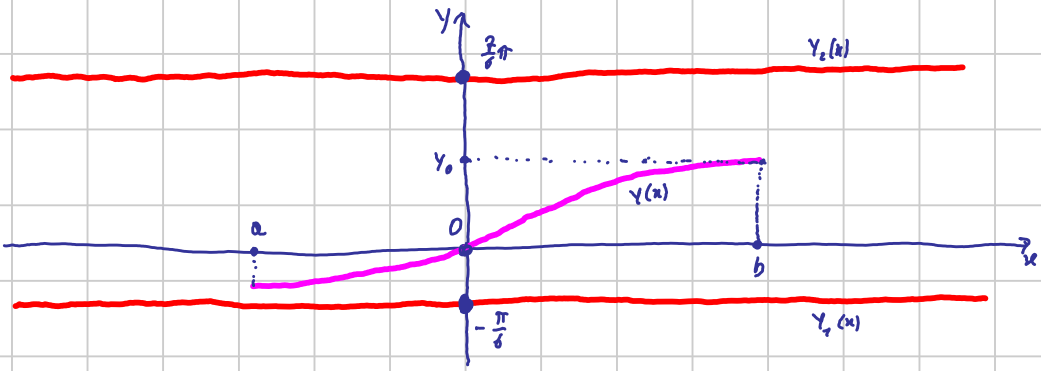
**d** (*) DETTO $\ell$ IL LIMITE TROVATO AL PUNTO **b**, DIRE PER QUALI $k$ SI HA $|y(x)-\ell| = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ PER $x \to -\infty$.

SVOLGIMENTO

**a** TUTTI I VALORI DI $y$ PER I QUALI $\sin y = -\frac{1}{2}$ DANNO LUOGO A SOL. COSTANTI. IN PARTICOLARE CI SONO LE 2 SOL. COSTANTI $y_1(x) = -\frac{\pi}{6}$ E $y_2(x) = \frac{7}{6}\pi$. VISTO CHE $y(x)$ SODDISFA $y(0)=0$, FINCHÉ È PROLUNGABILE RIMANE CONFINATA NELLA STRISCIA TRA $y_1(x)$ E $y_2(x)$. QUESTO PERCHÉ, GRAZIE AL TEO. DI UNICITÀ $y_1(x)$ E $y_2(x)$ NON POSSONO ESSERE INTERSECATE. SI NOTI CHE PER $-\frac{\pi}{6} < y < \frac{7}{6}\pi$ SI HA $\sin y > -\frac{1}{2}$ E QUINDI IL II° MEMBRO DI:

$$y' = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right)$$

È STRETTAMENTE POSITIVO. DI CONSEGUENZA, FINCHÉ ESISTE, $y(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE. LA SITUAZIONE È QUELLA DESCRITTA NELLA FIGURA SEGUENTE:




MOSTRIAMO ORA CHE L'INTERVALLO MASSIMALE DI DEFINIZIONE $(a,b)$ È IN REALTÀ $(-\infty,+\infty)$.

AD ESEMPIO MOSTRIAMO CHE $b=+\infty$.

INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE PRENDIAMO:

$$y_0 = \lim_{x\to b^-} y(x)$$

ESISTE FINITO PERCHÉ $y(x)$ È CRESCENTE E LIMITATA

E CONSIDERIAMO IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\dfrac{3}{2} + \sin y\right) \\ y(b) = y_0 \end{cases}$$

E SIA $v \in C^1([b-\delta, b+\delta])$ LA SUA SOL. LOCALE.

MOSTRIAMO CHE:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x) & x \in (a,b) \\ v(x) & x \in [b, b+\delta) \end{cases}$$

RISOLVE L'EQ. DIFF. SU TUTTO $(a, b+\delta)$.

A TALE SCOPO, VISTO CHE SO GIÀ CHE $y(x)$ È SOL SU $(a,b)$ E $v(x)$ SU $(b-\delta, b+\delta)$, BASTA VERIFICARE CHE $\tilde{y}(x)$ È CONTINUA E DERIVABILE ANCHE NEL PUNTO DI RACCORDO $x=b$. SI HA:

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y_0 = v(b) \qquad \text{QUINDI } \tilde{y}(x) \text{ È CONTINUA PER } x=b.$$

INOLTRE:

$$\lim_{x\to b^-} y'(x) = \lim_{x \to b^-} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y(x)\right) = \frac{2e^{-b}}{1+e^{-b}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y_0\right) = \frac{2e^{-b}}{1+e^{-b}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin(v(b))\right) = v'(b)$$

QUINDI $\tilde{y}(x)$ È ANCHE DERIVABILE PER $x=b$, E QUINDI $\tilde{y}(x)$ È UN PROLUNGAMENTO DI $y(x)$, IN CONTRASTO COL FATTO CHE $((a,b), y(x))$ SIA SOL. MASSIMALE.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE $b$ NON SIA $+\infty$.

ANALOGAMENTE SI MOSTRA CHE $a = -\infty$.

QUINDI $y(x)$ È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

**b** OSSERVIAMO ORA CHE, GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $y(x)$, ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \ell \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right)$$

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\ell = -\frac{\pi}{6}$.

INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE, SI AVREBBE:

$$\lim_{x\to-\infty} y'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y(x)\right) = 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \sin(\ell)\right) > 0$$

PERCHÉ STIAMO SUPPONENDO $\ell \neq -\frac{\pi}{6}$

DI CONSEGUENZA ESISTEREBBERO $x_0 < 0$ E $m > 0$ TALI CHE $y'(x) \geq m$ PER $x \leq x_0$.

QUINDI, $\forall x < x_0$ SI AVREBBE

$$y(x) = y(x_0) + y(x) - y(x_0) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = y(x_0) - \int_{x}^{x_0} y'(t)\,dt \leq y(x_0) - \int_{x}^{x_0} m\,dt = y(x_0) - m(x_0 - x)$$

DA CUI SEGUIREBBE

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) \leq \lim_{x\to-\infty} \left(y(x_0) - m(x_0 - x)\right) = -\infty$$

CHE È ASSURDO, VISTO CHE $y(x) \geq -\frac{\pi}{6}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE $\ell \neq -\frac{\pi}{6}$.

**c** INVECE $\lim_{x\to+\infty} y(x)$, CHE PURE ESISTE GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $y(x)$, NON VALE $\frac{7}{6}\pi$.

INFATTI OSSERVIAMO CHE, $\forall x \in \mathbb{R}$, SI HA:

$$y'(x) = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right) \leq \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + 1\right) < \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \ln e = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} < 2e^{-x}$$

QUINDI $\forall x > 0$ SI HA

$$y(x) = y(x) - 0 = y(x) - y(0) = \int_0^x y'(t)\,dt < \int_0^x 2e^{-t}\,dt = 2\left(-e^{-x} + e^0\right) = 2(1 - e^{-x}) < 2$$

QUINDI:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \ell < 2 < \frac{7}{6}\pi$$

$\boxed{d}$ PRIMA DI RISPONDERE AL QUESITO PREPARIAMOCI UNO STRUMENTO DA USARE:

**PROP. 1** SIA $y_3(x)$ LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:

$$(26) \quad \begin{cases} y' = G(y) \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

DOVE $G(y)$ È LIPSCHITZIANA E SODDISFA

$$G(y) < \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin y\right) \qquad \forall x \leq -1 \quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right]$$

ALLORA, $\forall x \leq -1$ IN CUI $y_3(x)$ È DEFINITA SI HA $y_3(x) > y(x)$. (DOVE $y(x)$ È LA SOL. DI **(25)**)

**DIMO**

SIA $(\alpha, -1]$ L'INSIEME DEGLI $x \leq 1$ SU CUI $y_3(x)$ È DEFINITA E SIA

$$A = \{x \in (\alpha, -1] \mid y_3(x) \leq y(x)\}$$

(SI NOTI CHE $-1 \notin A$ PERCHÉ $y_3(-1) = 0$ E $y(-1) < 0$)

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE A È VUOTO.

SE COSÌ NON FOSSE, DETTO $\bar{x} = \sup A$, PER LA CONTINUITÀ DI $y_3(x)$ E $\bar{y}(x)$ SI AVREBBE

$y(\bar{x}) = y_3(\bar{x})$, $\bar{x} < -1$ E (OVVIAMENTE) $y_3(x) > y(x)$ PER $x \in (\bar{x}, -1]$

MA ALLORA, $\forall x \in (\bar{x}, -1]$ SI AVREBBE

$$\frac{y(x) - y(\bar{x})}{x - \bar{x}} < \frac{y_3(x) - y_3(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

DA CUI, PASSANDO AL LIMITE PER $x \to \bar{x}^+$

$$y'(\bar{x}) \leq y_3'(\bar{x})$$

CHE È ASSURDO PERCHÉ:

$$y'(\bar{x}) = \frac{2e^{-\bar{x}}}{1+e^{-\bar{x}}} \ln\left(\frac{3}{2} + \sin(y(\bar{x}))\right) > G(y(\bar{x})) = G(y_3(\bar{x})) = y_3'(\bar{x})$$

ABBIAMO CIOÈ OTTENUTO UN ASSURDO SUPPONENDO A NON VUOTO.

QUINDI A È VUOTO, CIOÈ FINCHÉ ESISTE $y_3(x)$ RIMANE SOPRA DA $\bar{y}(x)$.

QUESTO CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE DI $\boxed{\text{PROP. 1}}$

A QUESTO PUNTO CI SERVE UNA $G(y)$ CHE SODDISFI LE IPOTESI DELLA

$\boxed{\text{PROP. 1}}$ E PER LA QUALE LA SOLUZIONE $y_3(x)$ DEL PROB. DI CAUCHY **(26)**

SI SCHIACCI ESPONENZIALMENTE SULL'ASINTOTO $y=-\frac{\pi}{6}$ PER $x\to-\infty$.

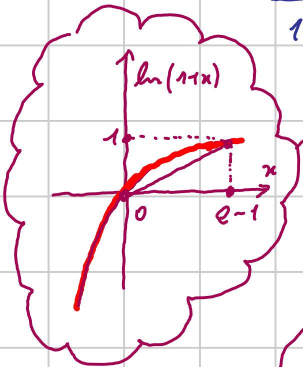
UNA $G(y)$ CHE VA BENE È:

$$G(y)=\frac{1}{4}\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$$

INFATTI PER OGNI $(x,y)\in(-\infty,-1]\times\left(-\frac{\pi}{6},0\right]$ SI HA:

PERCHÉ PER $x\le -1$ $e^{-x}\ge e>1$
QUINDI $\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}>\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+e^{-x}}=1$

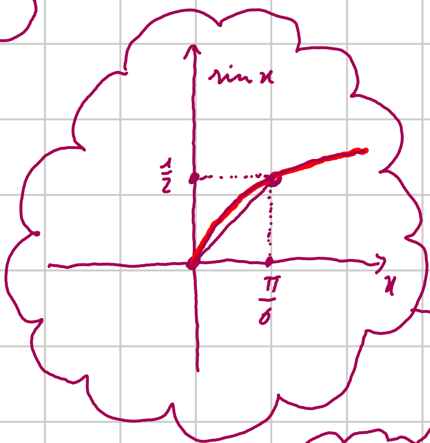
$$\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}\ln\left(\frac{3}{2}+\sin y\right)>\ln\left(\frac{3}{2}+\sin y\right)\ge$$




$$\ge\frac{1}{e-1}\left(\frac{1}{2}+\sin y\right)\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\sin y\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\sin\left(y+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\right)\ge$$




$$\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overbrace{\frac{3}{\pi}\left(y+\frac{\pi}{6}\right)}>$$

PERCHÉ $-\frac{\pi}{6}<y\le 0$

$$>\frac{1}{4}\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$$

QUINDI $G(y)=\frac{1}{4}\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$ SODDISFA LA CONDIZIONE RICHIESTA DA $\boxed{\text{PROP. 1}}$.

TROVIAMO ORA LA SOLUZIONE $y_3(x)$ DI:

$$\begin{cases} y'=\frac{1}{4}\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\\ y(-1)=0\end{cases}$$

VISTO CHE È LINEARE DEL I° ORDINE SI TROVA SUBITO:

$$y_3(x)=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}e^{\frac{1}{4}(x-1)}$$

A QUESTO PUNTO SIAMO IN GRADO DI CONCLUDERE PERCHÉ $\forall x\le -1$ SI HA:

GRAZIE ALLA $\boxed{\text{PROP. 1}}$

$$-\frac{\pi}{6} < y(x) < y_3(x)$$

PER OGNI $k \in \mathbb{N}$

QUINDI:

$$\left| y(x) + \frac{\pi}{6} \right| < \left| y_3(x) + \frac{\pi}{6} \right| = \frac{\pi}{6} e^{\frac{1}{4}(x-1)} = o\left(\frac{1}{x^k}\right) \quad \text{PER } x \to -\infty$$

# Eq. a Variabili Separabili $\boxed{\text{Sim } 3}$

1 ora (parte standard) + 2 ore (parte facoltativa)

$\boxed{1}$ DATO IL PR. DI CAUCHY
$$\begin{cases} y' = \left( \dfrac{y^2 - y}{x^2 - x} \right)^m \\ y(2) = y_0 \end{cases}$$

$\boxed{a}$ NEL CASO $m=1$, TROVARE LE SOLUZIONI CON DATI INIZIALI $y_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0 = 2$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{b}$ NEL CASO $m=3$ DIRE SE LA SOLUZIONE CON DATO INIZIALE $y_0 = \frac{1}{2}$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

$\boxed{\text{FACOLTATIVO}}$ $\boxed{c}$ NEL CASO $m=3$ STABILIRE PER QUALI DATI INIZIALI $y_0$ LA SOLUZIONE È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

---

$\boxed{2}$ DATO IL PR. DI CAUCHY
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 - e^y}{e^y} \cdot \left( \dfrac{1}{1+x^2} \right)^\alpha \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$\boxed{a}$ NEL CASO $\alpha = 1$ TROVARE LE SOLUZIONI CON DATI INIZIALI $y_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0 = -1$.

$\boxed{b}$ NEL CASO $\alpha = \frac{1}{3}$ MOSTRARE CHE LA SOLUZIONE CON DATO INIZIALE $y_0 = 1$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$

$\boxed{\text{FACOLTATIVO}}$ $\boxed{c}$ DETTA $y(x)$ LA SOLUZIONE DEL PUNTO $\boxed{b}$, MOSTRARE CHE $y(x) \to 0$ PER $x \to +\infty$ E STIMARNE L'ORDINE DI INFINITESIMO.

# Soluzioni

**1** **a** PER $m=1$ IL P. DI CAUCHY DIVENTA:

(1)
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-y}{x^2-x} \\ y(2)=y_0 \end{cases}$$

L'APERTO DI $\mathbb{R}^2$ CHE CONTIENE I GRAFICI DELLE SOL. RICHIESTE È:

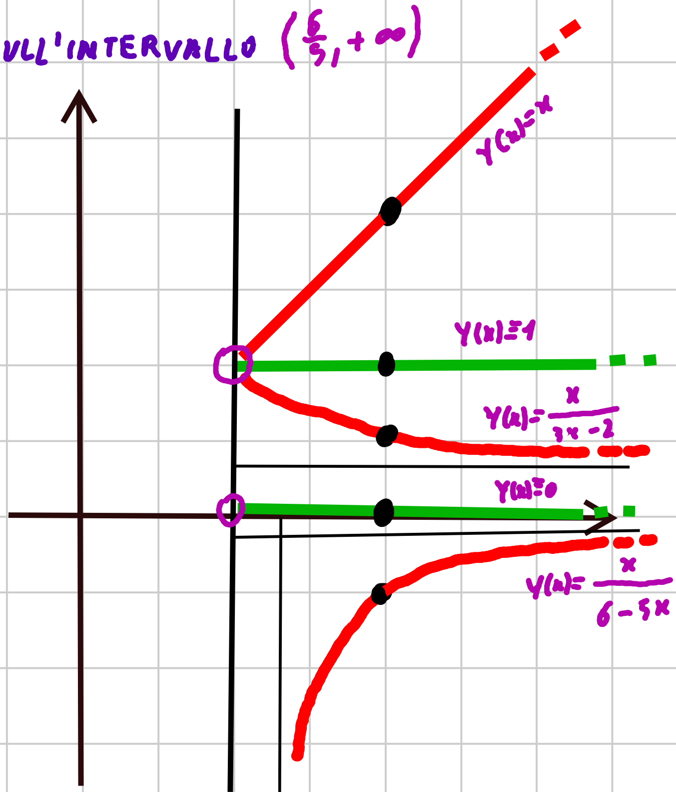
$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>1\}$$

PERCHÈ L'EQUAZIONE NON È DEFINITA PER $x=0$ E $x=1$ E, SICCOME IL DATO INIZIALE VIENE DATO PER $x_0=2$, DELLE TRE REGIONI $x<0$, $0<x<1$ E $x>1$ PRENDIAMO LA TERZA.

LE SOLUZIONI CHE TROVEREMO SONO

PER $y_0=0$, $y(x)\equiv 0$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$
PER $y_0=1$, $y(x)\equiv 1$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$
PER $y_0=2$, $y(x)=x$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$
PER $y_0=\frac{1}{2}$, $y(x)=\dfrac{x}{3x-2}$ SULL'INTERVALLO $(1,+\infty)$
PER $y_0=-\frac{1}{2}$, $y(x)=\dfrac{x}{6-5x}$ SULL'INTERVALLO $(\frac{6}{5},+\infty)$

NELLA FIGURA A FIANCO SONO RAFFIGURATI I LORO GRAFICI.




QUELLE CON DATI INIZIALI $y_0=0$ E $y_0=1$ CORRISPONDONO ALLE SOL. COSTANTI.

LE ALTRE SI TROVANO SEPARANDO LE VARIABILI. SI HA:

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)-y(x)} = \frac{1}{x^2-x}$$

INTEGRANDO IN AMBO I MEMBRI, NEL SECONDO SI OTTIENE:

PERCHÉ $x>1$

$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+c = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+c$$

MENTRE NEL PRIMO SI HA:

$y=y(x)$

$$\int \frac{y'(x)}{(y(x))^2-y(x)}\,dx = \int \frac{1}{y^2-y}\,dy = \dots = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|+c = \ln\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right|+c$$

DA CUI SEGUE:

$$\ln\left|1-\frac{1}{y(x)}\right| = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$\left|1-\frac{1}{y(x)}\right| = e^c\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right) \qquad c\in\mathbb{R}$$

CIOÈ:

(2) $$1-\frac{1}{y(x)} = k\left(1-\frac{1}{x}\right) \qquad k\in\mathbb{R}-\{0\}$$

SE $y(2)=2$ SI HA $1-\frac{1}{2}=k\left(1-\frac{1}{2}\right)$, CIOÈ $k=1$, E QUINDI (2) DIVENTA $y(x)=x$.

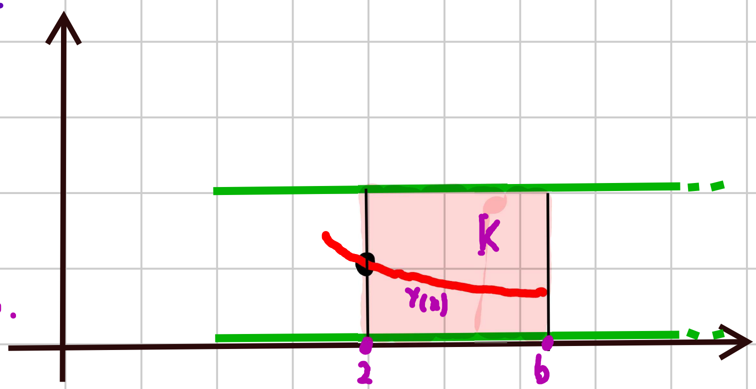
SE $y(2)=\frac{1}{2}$ SI HA $1-2=k\left(1-\frac{1}{2}\right)$, CIOÈ $k=-2$, E QUINDI (2) DIVENTA $y(x)=\frac{x}{3x-2}$.

SE $y(2)=-\frac{1}{2}$ SI HA $1+2=k\left(1-\frac{1}{2}\right)$, CIOÈ $k=6$, E QUINDI (2) DIVENTA $y(x)=\frac{x}{6-5x}$.

$\boxed{b}$ PER $m=3$ IL P. DI CAUCHY DIVENTA

(3) $$\begin{cases} y'=\left(\dfrac{y^2-y}{x^2-x}\right)^3 \\ y(2)=y_0 \end{cases}$$

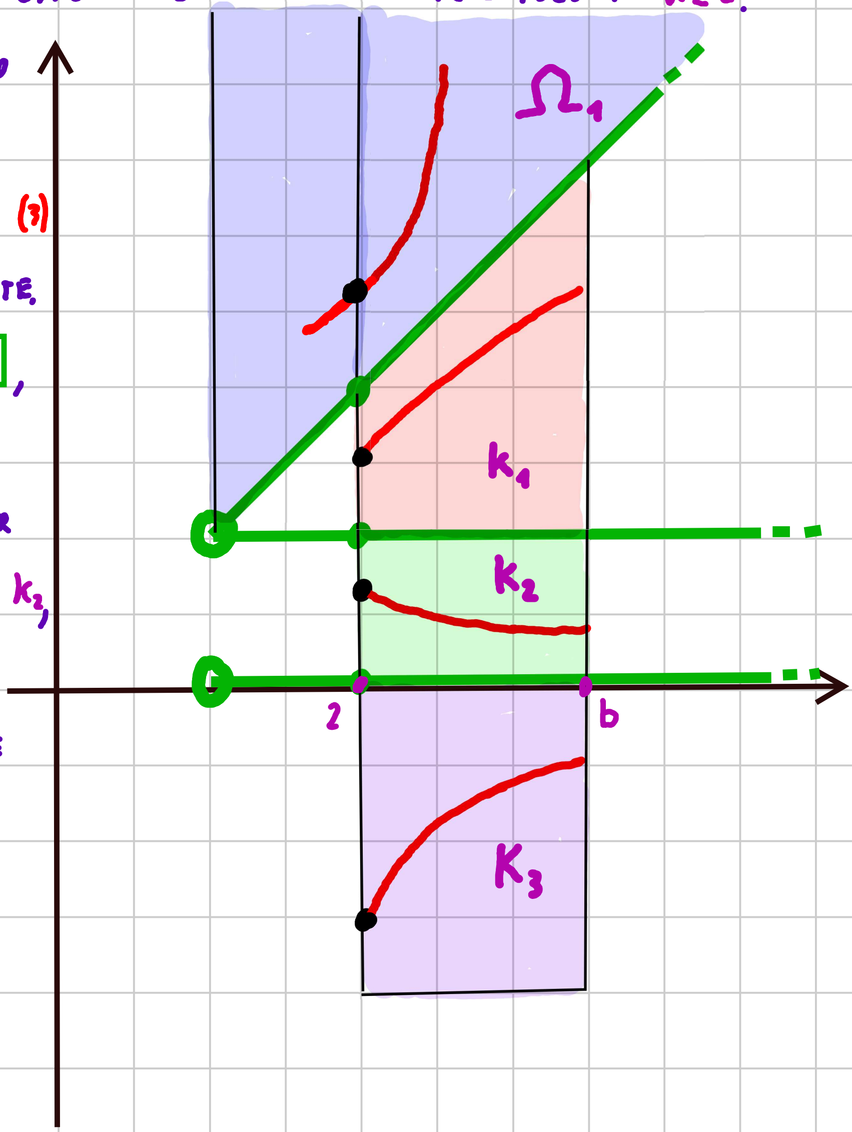
LE SOL. COSTANTI DELL'EQUAZ. SONO SEMPRE $y(x)\equiv 0$ E $y(x)\equiv 1$, QUINDI LA SOL. $y(x)$ DI (3) CON $y_0=\frac{1}{2}$ NON PUÒ INTERSECARLE, PER IL T. DI UNICITÀ. QUINDI, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE, RIMANE NELLA STRISCIA $0<y<1$. MOSTRIAMO CHE ALLORA È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.



INFATTI, SE PER ASSURDO NON FOSSE PROLUNGABILE OLTRE UN CERTO $b>2$, ALLORA IL SUO GRAFICO SULL'INTERVALLO $(0,b)$ SAREBBE CONTENUTO NEL COMPATTO $K=\{(x,y) \mid 1\le x\le b,\ 0\le y\le 1\}$ (VEDI FIG. PAG. PREC.). MA ALLORA $y(x)$ È PROLUNGABILE OLTRE $b$, PER IL T. DELLA PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI.

$\boxed{c}$ DETTA $y_\alpha(x)$ LA SOLUZIONE DI (3) CON DATO INIZIALE $y(x_0)=\alpha$, MOSTRIAMO CHE $y_\alpha(x)$ È ESTENDIBILE FINO A $+\infty$ SE E SOLO SE $\alpha\le 2$.

PER PRIMA COSA OSSERVIAMO CHE $y(x)\equiv 0$, $y(x)\equiv 1$ E $y(x)=x$ SONO SOLUZIONI DI (3) PER $y(x_0)=0,1,2$, RISPETTIVAMENTE. QUINDI, RAGIONANDO COME IN $\boxed{b}$, SI DIMOSTRA CHE $y_\alpha(x)$ È ESTENDIBILE FINO A $+\infty$ PER $0<\alpha<1$, USANDO IL COMPATTO $K_2$, E PER $1<\alpha<2$ USANDO IL COMPATTO $K_1$. SIMILE È ANCHE IL CASO $\alpha<0$ CON L'UNICA DIFFERENZA CHE SI UTILIZZA LA CRESCENZA DI $y_\alpha(x)$ PER DIRE CHE $y_\alpha(x)$ NON PUÒ TOCCARE IL LATO PIÙ BASSO DEL COMPATTO $K_3$.




INFINE PER MOSTRARE CHE PER $\alpha>2$ $y_\alpha(x)$ NON È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$ SI CONSIDERINO I P. DI CAUCHY:

$$(4)\quad \begin{cases} y'=\left(\dfrac{y^2-y}{x^2-y}\right)^3 \\ y(0)=\alpha \end{cases} \qquad\qquad (5)\quad \begin{cases} y'=\dfrac{y^2-y}{x^2-y} \\ y(0)=\alpha \end{cases}$$

SULL'APERTO $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x > 1\}$ SI HA:

(6)
$$\left(\frac{y^2-y}{x^2-x}\right)^3 > \frac{y^2-y}{x^2-x}$$

QUESTO PERCHÉ $\varphi(t) = t^2 - t$ È CRESCENTE PER $t > 1$ E DUNQUE, SE $1 < x < y$ SI HA:

$$\frac{y^2-y}{x^2-x} = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} > 1$$

DA CUI SEGUE (6).

SICCOME LE SOLUZIONI DI (4) E (5) NON POSSONO INTERSECARE LA SOL. $y(x) = x$, FINCHÉ ESISTONO HANNO IL GRAFICO CHE STA IN $\Omega_1$.
MA SICCOME SU $\Omega_1$ VALE (6) POSSO APPLICARE IL T. DEL CONFRONTO E DIRE CHE, FINCHÉ ESISTONO ENTRAMBE, PER $x > 2$ LA SOL. DI (4) STA SOPRA ALLA SOL. DI (5). MA LA SOL. DI (5) PUÒ ESSERE CALCOLATA ESPLICITAMENTE SEPARANDO LE VARIABILI. PIÙ PRECISAMENTE, SE IL DATO INIZIALE È $\alpha > 2$, LA SOL. DI (5) È:

$$y(x) = \frac{\alpha x}{(2\alpha-2)-(\alpha-2)x}$$

CHE HA UN ASINTOTO VERTICALE PER $x_0 = 2 + \frac{2}{\alpha-2}$, OVVERO $\lim_{x \to x_0^-} y(x) = +\infty$.
DI CONSEGUENZA ANCHE LA SOL. DI (4) NON PUÒ ESSERE PROLUNGATA OLTRE $x_0$

---

$\boxed{2}$ $\boxed{a}$ PER $\alpha = 1$ IL P. DI CAUCHY È:
(7)
$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-e^y}{e^y} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

LA CUI UNICA SOL. COSTANTE È $y(x) \equiv 0$, CHE CORRISPONDE AL DATO INIZIALE $y_0 = 0$.
TUTTE LE ALTRE SOL. SI OTTENGONO SEPARANDO LE VARIABILI:

$$\frac{e^y y'}{e^y - 1} = -\frac{1}{1+x^2}$$

DA CUI SEGUE:

$$\left(\ln\left|e^{y(x)}-1\right|\right)' = \left(-\arctan x\right)'$$

CIOÈ:

$$\ln\left|e^{y(x)}-1\right| = -\arctan x + c \qquad \text{CON } c\in\mathbb{R}$$

OVVERO:

$$e^{y(x)} = 1 \boxed{\pm e^{c}} \cdot e^{-\arctan x} \qquad \text{CON } c\in\mathbb{R}$$

CHE EQUIVALE A:

(8) $$y(x) = \ln\left(1+\boxed{k}\, e^{-\arctan x}\right) \qquad \text{CON } k\neq 0$$

PER AVERE $y(0)=1$ BISOGNA CHE SIA $1+k\cdot e^{0}=e$, CIOÈ $k=e-1$, QUINDI LA (8) DIVENTA:

$$y(x) = \ln\left(1+(e-1)\,e^{-\arctan x}\right)$$

CHE È DEFINITA PER OGNI $x\in\mathbb{R}$.

INVECE PER AVERE $y(0)=-1$ DEVE ESSERE $1+k=\frac{1}{e}$ CIOÈ $k=\frac{1}{e}-1$, PERCIÒ LA (8) DIVENTA:

$$y(x) = \ln\left(1-\left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-\arctan x}\right)$$

CHE È DEFINITA PER $x > \tan\left(\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)$.

$\boxed{b}$ SIA $y(x)$ LA SOL. DI

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-e^{y}}{e^{y}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

SI NOTI CHE IL 2° MEMBRO DELL'EQUAZ. È NEGATIVO SE $y>0$ E POSITIVO SE $y<0$.

INOLTRE LA SOL. COSTANTE È ANCORA LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA.

DI CONSEGUENZA, FINCHÉ $y(x)$ È DEFINITA, IL SUO GRAFICO RIMANE SOPRA L'ASSE $x$, QUINDI $y'(x)<0$ E DI CONSEGUENZA $y(x)$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE. GRAZIE A QUESTO, QUANDO LA SI PROLUNGA IN AVANTI, CONTINUA A SODDISFARE LA CONDIZIONE $0<y(x)<1$. QUINDI, SE PER ASSURDO FOSSE PROLUNGABILE NON FINO A $+\infty$ MA SOLO FINO A $b<+\infty$, ALLORA IL SUO GRAFICO PER $0<x<b$ SAREBBE TUTTO CONTENUTO NEL COMPATTO $K=\{(x,y) \mid 0\le x\le b,\ 0\le y\le 1\}$, QUINDI, PER IL TEOREMA DI PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI, $y(x)$ È PROLUNGABILE OLTRE $b$ (ASSURDO).

$\boxed{C}$ SICCOME $y(x)$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE $\exists\, \ell = \lim_{x\to+\infty} y(x)$, INOLTRE DEVE ESSERE $0 \le \ell < 1$ PERCHÈ $y(x)$ È SEMPRE POSITIVA E $y(0)=1$.

MA NON PUÒ ESSERE $\ell \neq 0$ PERCHÈ, SE PER ASSURDO FOSSE COSÌ, ALLORA SI AVREBBE $y(x) > \ell$ PER OGNI $x > 1$ E QUINDI:

SI OSSERVI CHE SONO NEGATIVE

$$\boxed{\frac{1-e^{y(x)}}{e^{y(x)}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} < \boxed{\frac{1-e^{\ell}}{e^{\ell}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} < \boxed{\frac{1-e^{\ell}}{e^{\ell}\cdot\sqrt[3]{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

QUINDI ESISTEREBBE $A>0$ TALE CHE $\forall x>1$ SI HA

$$y'(x) = \frac{1-e^{y(x)}}{e^{y(x)}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} < -\frac{A}{\sqrt[3]{x^2}}$$

DI CONSEGUENZA $\forall x > 1$ SI HA

PER $x\to+\infty$

$$y(x) - y(1) = \int_1^x y'(t)\,dt < -A\int_1^x \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt \longrightarrow -\infty$$

QUINDI SI OTTERREBBE $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$, IN CONTRASTO COL FATTO CHE $y(x)>0$.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE $\ell \neq 0$.

CERCHIAMO ORA DI STIMARE L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $y(x)$ PER $x\to+\infty$.

A TALE SCOPO DIMOSTRIAMO CHE $\forall \varepsilon>0$ $\exists^{\text{no}}$ $\delta>0$ E $M>0$ T.C. SE $x>M$ E $0<y<\delta$ ALLORA SI HA:

(9) $$-\frac{y}{\sqrt[3]{x^2}} < \frac{1-e^{y}}{e^{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} < -(1-\varepsilon)^2\cdot\frac{y}{\sqrt[3]{x^2}}$$

PER DIMOSTRARE (9) SI OSSERVI CHE:

$$\frac{1-e^{y}}{e^{y}} = e^{-y}-1 = -y+\frac{y^2}{2}+o(y^2) = -y\left(1-\frac{y}{2}+o(y)\right) \qquad \text{PER } y\to 0$$

DA CUI SEGUE CHE

(10) $\exists\,\delta>0$ TALE CHE SE $0<y<\delta$ ALLORA $-y < \dfrac{1-e^{y}}{e^{y}} < -(1-\varepsilon)\,y$

INOLTRE:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)$$

QUINDI, SICCOME PER $x\to+\infty$ SI HA $1-\frac{1}{1+x^2}\to 1^-$, SI OTTIENE CHE

(11) $\exists M>0$ TALE CHE SE $x>M$ ALLORA $(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

COMBINANDO (10) E (11) SI OTTIENE (9).

MA POICHÉ SAPPIAMO CHE $Y(x)\to 0^+$ PER $x\to+\infty$, POSSIAMO PRENDERE $\bar{x}>M$ TALE CHE $\forall x\geq\bar{x}$ SI ABBIA $0<Y(x)<\delta$.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $\forall\varepsilon>0$ ESISTONO $\delta>0$, $M>0$ E $\bar{x}>M$ TALI CHE SULL'INSIEME

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<\delta,\ x>M\}$$

VALE LA (9) E INOLTRE PER $x\geq\bar{x}$ $\Omega$ CONTIENE IL GRAFICO DI $Y(x)$.

ORA, DETTO $\bar{Y}=f(\bar{x})$, CONSIDERIAMO I TRE P. DI CAUCHY:

$$(12)\ \begin{cases} y'=-\frac{y}{\sqrt[3]{x^2}} \\ y(\bar{x})=\bar{y}\end{cases} \qquad (13)\ \begin{cases} y'=\frac{1-e^y}{e^y}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}} \\ y(\bar{x})=\bar{y}\end{cases} \qquad (14)\ \begin{cases} y'=-(1-\varepsilon)^2\cdot\frac{y}{\sqrt[3]{x^2}} \\ y(\bar{x})=\bar{y}\end{cases}$$

LA SOL. DI (13) È LA NOSTRA $Y(x)$ MENTRE CON FACILI CALCOLI SI TROVA CHE LE SOL. $Y_1(x)$ DI (12) E $Y_2(x)$ DI (14) SONO:

$$Y_1(x)=\bar{Y}e^{3\sqrt[3]{\bar{x}}}\cdot e^{-3\sqrt[3]{x}} \qquad Y_2(x)=\bar{Y}\cdot e^{3(1-\varepsilon)^2\sqrt[3]{\bar{x}}}\cdot e^{-3(1-\varepsilon)^2\sqrt[3]{x}}$$

MA GRAZIE A (9) POSSIAMO APPLICARE IL T. DEL CONFRONTO E DIRE CHE PER OGNI $x>\bar{x}$ SI HA:

$$Y_1(x)<Y(x)<Y_2(x)$$

DA CUI SEGUE CHE PER $x\to+\infty$ $Y(x)$ VA A ZERO PIÙ RAPIDAMENTE DI OGNI FUNZIONE DEL TIPO $g(x)=k\,e^{-\lambda\sqrt[3]{x}}$ CON $\lambda<3$ MA NON PIÙ RAPIDAMENTE DI $h(x)=e^{-3\sqrt[3]{x}}$.

# Equazioni Differenziali

(Tempo di svolgimento: 3 ore)

**Sim 4**

**1** DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = y^3 - y \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ SIA $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE. MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE IN AVANTI FINO A $+\infty$ E CHE È INFINITESIMA PER $x \to +\infty$. (PER FARLO, LO STUDENTE PUÒ, A SUA DISCREZIONE, RICORRERE AD UNO STUDIO QUALITATIVO OPPURE TROVARE ESPLICITAMENTE $y(x)$).

**2** DATA L'EQUAZIONE $y' = \left(y^{2+m(y-x)} + 1\right) \cdot \frac{1}{1+x^2}$

**a** NEL CASO $m=0$ TROVARE TUTTE SOL. E DIRE QUALI SONO RETTE.

FACOLTATIVO **b** NEL CASO $m=1$ DIRE QUALI, TRA LE SOLUZIONI CHE INTERSECANO IL SEMIASSE POSITIVO DELLE $y$, SONO PROLUNGABILI FINO A $+\infty$.

**3** DATO L'OPERATORE $\mathcal{L} = D^5 + 2D^4 + 3D^3 + 3D^2 + 2D + I$, PER CIASCUNA DELLE SEGUENTI CONDIZIONI, TROVARE TUTTE LE $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ CHE LE SODDISFANO:

**a** $\mathcal{L}(y) = 0$ E $\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0$.

**b** $\mathcal{L}(y) = e^{-2x}$ E $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

**4** DATA L'EQUAZIONE DIFF. $y^{(4)} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = x^2$

**a** TROVARNE UNA SOL. PARTICOLARE.

FACOLTATIVO **b** TROVARNE TUTTE LE SOL. $y(x)$ TALI CHE $\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = +\infty$.

**5** RISOLVERE IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot \ln x \\ y(1) = -\frac{3}{4e}, \quad y'(1) = -\frac{1}{4e} \end{cases}$

(Verrà svolto a lezione mercoledì)

# QUESITI PRESI DALLE PROVE SCRITTE

## 1

DATO IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = (y^2-1)e^{x+\alpha y} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

VALE 5 PUNTI → **a** RISOLVERLO PER $\alpha = 0$

FACOLTATIVA → **b** DETTA $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE PER $\alpha=1$, TROVARE LO SVILUPPO DI TAYLOR FINO AL SECONDO ORDINE DI $y(x)$ NEL PUNTO $x=0$.

## 2

DATO IL PROB. DI CAUCHY:

6 PUNTI

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos^2(2y)}{1+x^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

RISOLVERLO NEI CASI $y_0 = 0$, $y_0 = \frac{\pi}{2}$ E $y_0 = \frac{\pi}{4}$.

## 3

DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\left(\sqrt[3]{y^2} - y\right)\cdot 3}{x} \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

5 PUNTI → **a** TROVARNE UNA SOLUZIONE MASSIMALE.

FACOLTATIVO → **b** TROVARNE **TUTTE** LE SOLUZIONI MASSIMALI.

## 4

**a** TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE:

5 PUNTI

$$y''' - 3y' + 2y = (3x+4)e^x$$

**b** TROVARE (SE ESISTE), UN'EQUAZIONE DEL TIPO

FACOLTATIVO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = (3x+4)e^x$$

CON $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, IN MODO CHE ABBIA TRA LE SUE SOLUZIONI LA FUNZIONE:

$$y(x) = \frac{1}{8}x^2 e^x - \frac{3}{2} x e^{-x}$$

5

DATA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

(*) $$y'' - 3y' + 2y = 10\cos x + e^x$$

a TROVARE TUTTE LE SUE SOLUZIONI

b TRA TUTTE LE EQ. DIFF. OMOGENEE A COEFF. COSTANTI REALI IL CUI INSIEME DELLE SOLUZIONI CONTIENE QUELLO DI (*) TROVARE QUELLA DI ORDINE MINIMO.

6

SI CONSIDERI IL PROBLEMA DI CAUCHY:

(*) $$\begin{cases} y' = y \ln y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a TROVARNE LA SOLUZIONE $y_1(x)$ NEL CASO: $x_0 = 0$ E $y_0 = -\frac{1}{e}$.

b MOSTRARE CHE PER OGNI $(x_0, y_0)$ CON $-1 < y_0 < 0$ LA SOLUZIONE DI (*) È UNA TRASLAZIONE DELLA $y_1(x)$ TROVATA NEL PUNTO a.

7A

SI CONSIDERI L'EQUAZIONE $\mathcal{L}(y) = e^{2x}$ DOVE $\mathcal{L} = D^3 - D^2 + D - I$.

a) TROVARNE LA SOL. GENERALE

b) TROVARNE LA SOL. $y(x)$ TALE CHE $y(0) = \frac{1}{5}$, $y'(0) = \frac{2}{5}$ E $y''(0) = \frac{4}{5}$.

c) TROVARNE TUTTE LE SOL. CHE SONO STRETTAMENTE POSITIVE $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) TROVARE LA SOL. GENERALE DI $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}(y) = e^{2x}$

7B

SI CONSIDERI L'EQUAZIONE $\mathcal{L}(y) = e^{-x}$ DOVE $\mathcal{L} = D^3 + 2D^2 + 4D + 8I$.

a) TROVARNE LA SOL. GENERALE

b) TROVARNE LA SOL. $y(x)$ TALE CHE $y(0) = \frac{1}{5}$, $y'(0) = -\frac{1}{5}$ E $y''(0) = \frac{1}{5}$.

c) TROVARNE TUTTE LE SOL. CHE SONO STRETTAMENTE POSITIVE $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) TROVARE LA SOL. GENERALE DI $\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{L}(y) = e^{-x}$

8

DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = -(x^2+y)^5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, SI INDICHI CON $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE

a) MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

b) MOSTRARE CHE $y(x) \to -\infty$ PER $x \to +\infty$

FACOLTATIVO c) PER $x \to +\infty$ ESISTE IL LIMITE DI $y'(x)$ ? SE SI, TROVARLO.

9

TROVARE LA SOL. GENERALE DI $y^{(5)} - 3y''' + 3y'' - 3y' + 2y = 20e^{3x}$ DOPODICHÈ STABILIRE QUALI SOLUZIONI SONO: a) $o(e^{2x})$ PER $x \to -\infty$ b) STRETTAMENTE POSITIVE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

FACOLTATIVO

10

DATO IL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = 3\sqrt{xy + A} \cdot e^{x\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ y(1) = y_0 \end{cases}$ CON A PARAMETRO REALE.

FACOLTATIVO

a) PER $A = 0$ TROVARE LE SOL. NEI CASI $y_0 = 1$, $y_0 = \ln^2(e+1)$ E $y_0 = \ln^2(e-1)$.

b) PER $A = -\frac{1}{2}$ E $y_0 = 1$ MOSTRARE CHE LA SOL. $y(x)$ È PROLUNGABILE IN AVANTI FINO A $+\infty$ E PER $x \to +\infty$ SI HA $y(x) \to +\infty$.

11

Sia $y(x)$ la soluzione passante per l'origine di $\quad y' = |1 - y^2|^{1+|x|}$.

**(a)** Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$.

**(b)** Mostrare che $y(x)$ è dispari.

**(c)** [facoltativa] Dire, motivando la risposta, se $y(x) \to 1$ oppure no, per $x \to +\infty$.

12

Data l'equazione differenziale $\quad y^{(5)} - y^{(4)} + 5y^{(3)} - 5y'' + 4y' - 4y = 10e^x$.

**(a)** Trovarne la soluzione generale.

**(b)** Trovarne tutte le eventuali soluzioni $y(x)$ tali che $y(x) = o\left(x^2 e^x\right)$ per $x \to -\infty$.

13

Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^3 y - xy^3 - xy \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(1) Mostrare che $y(x)$ è prolungabile a tutto $\mathbf{R}$ e studiarne crescenza e decrescenza.

(2) Dire, motivando la risposta se $y(x)$ è una funzione pari.

(3) Calcolare $\lim_{x \to \pm\infty} y(x)$.

(4) Trovare l'ordine di infinito di $y(x)$ per $x \to +\infty$ (facoltativo).

14

Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = x^2 + e^{-x}. \tag{5}$$

Trovare poi un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti tale che l'insieme di tutte le sue soluzioni contenga l'insieme di tutte le soluzioni di (5).

15

Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x\left(y^2 - y\right)^{999} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

mostrare che $y(x)$ è estendibile a tutto $\mathbf{R}$, qualsiasi sia $\alpha \leq 1$.

16

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y^{(3)} + 3y'' + 2y' = 2xe^{-x}. \tag{1}$$

e tra esse determinare la soluzione $y(x)$ che, per $x \to 0$ soddisfa $y(x) = o\left(x^2\right)$.
Trovare poi un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti tale che l'insieme di tutte le sue soluzioni contenga l'insieme di tutte le soluzioni di (1).

17

Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^5 - x^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Mostrare che $y(x)$ ha un punto di massimo relativo per $x = 1$.

18

Sia data l'equazione differenziale $y'' + 4y' - 5y = b(x)$.

(1) Nel caso $b(x) = 14e^{2x}$ trovarne la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 2$ e $y'(0) = -2$.
(2) Nel caso $b(x) = -26\cos x$ trovarne la soluzione generale.
(3) Nel caso $b(x) = 12e^{x}$ trovarne la soluzione generale.

**19** DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y' + \frac{e^x}{1+e^x} g(y) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \\ y(\ln 3) = \frac{1}{3} \end{cases}$

a) NEL CASO $g(y) = y$, TROVARNE LA SOLUZIONE.

b) NEL CASO $g(y) = \sqrt{1+y^2}$, DIRE SE LA SOLUZIONE È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

**20** DATO L'OPERATORE DIFFERENZIALE $\mathcal{L} = D^6 + D$, TROVARE TUTTE LE SOLUZ. DI $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}(y) = e^{-2x}$ TALI CHE $y(0) = 1$ E CHE SONO $o(\sqrt{x} \cdot e^{-x})$ PER $x \to +\infty$.

**21** DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = 2x(x^2 - y^m) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ DOVE $m$ È UN PARAMETRO INTERO.

PER $m=1$: a) TROVARE LA SOLUZIONE.

PER $m=4$:
- b) DETTA $y(x)$ LA SOLUZIONE, MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.
- c) MOSTRARE CHE $y(x)$ È DISPARI E CHE $y(x) \to \pm\infty$ PER $x \to \pm\infty$.
- d) MOSTRARE CHE $y(x) - \sqrt{x} \to 0$ PER $x \to +\infty$ E STIMARNE L'ORDINE DI INFINITESIMO.

**22** TROVARE UN'EQUAZIONE LINEARE OMOGENEA A COEFFICIENTI COSTANTI CON IL MINIMO ORDINE POSSIBILE AVENTE TRA LE SUE SOLUZIONI ANCHE $y(x) = x \cos 2x + e^x \sin x$.

**23** DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = -y^2 + \ln(1+e^x) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$

(a) MOSTRARE CHE SE $\alpha = 0$ LA SOLUZIONE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

FACOLTATIVA (b) DIRE SE ESISTE UN DATO INIZIALE $\alpha$ TALE CHE LA SOL. $y(x)$ CHE SI OTTIENE, RISULTA DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$ E SEMPRE STRETTAMENTE CRESCENTE.

**24** SIA DATA L'EQUAZIONE $\mathcal{L}(y) = e^x$, DOVE $\mathcal{L} = D^4 + 13D^2 + 36I$.

(a) TROVARNE LA SOL. GENERALE

(b) TROVARNE, SE CI SONO, TUTTE LE SOL. CHE NON INTERSECANO L'ASSE $x$.

(c) TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE DI $\underbrace{\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \cdots \circ \mathcal{L}}_{10}(y) = e^x$.

# 1

# SOLUZIONI

**a** PER $\alpha=0$ L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$y' = (y^2-1)e^x$$

CHE HA COME SOLUZIONI COSTANTI $y\equiv -1$ E $y \equiv 1$.

SE CON $y(x)$ INDICHIAMO LA SOLUZIONE TALE CHE $y(0)=0$, ALLORA, FINCHÉ ESISTE, NON PUÒ INTERSECARE LE 2 SOL. COSTANTI E QUINDI SODDISFA:

$$-1 < y(x) < 1$$

QUINDI ANZICHÉ SCRIVERE CHE SODDISFA:

$$y'(x) = ((y(x))^2-1)e^x$$

POSSIAMO SCRIVERE:

$$\boxed{\frac{2\cdot y'(x)}{(y(x))^2-1}} = 2e^x$$

CIOÈ:

$$\boxed{\left(\ln\frac{1-y(x)}{1+y(x)}\right)'} = (2e^x)'$$

PERCHÈ $\int \frac{2}{y^2-1}\,dy = \int \frac{1+y+1-y}{y^2-1}\,dy = \int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy = \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \ln\frac{1-y}{1+y}$ (PER $-1<y<1$)

DA CUI SEGUE:

$$\ln\frac{1-y(x)}{1+y(x)} = 2e^x + C \qquad C\in\mathbb{R}$$

MA POICHÈ $y(0)=0$, SI HA $C=-2$, QUINDI:

$$\frac{1-y(x)}{1+y(x)} = e^{2e^x-2}$$

CIOÈ

$$\frac{2}{1+y(x)} - 1 = e^{2e^x-2}$$

CIOÈ

$$y(x) = \frac{2}{1+e^{2e^x-2}} - 1$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE TALE $y(x)$ È SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY.

**b** IL POLINOMIO DI TAYLOR DI $y(x)$ CERCATO È:

$$P(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{1}{2}y''(0)x^2$$

BASTERÀ DUNQUE CALCOLARE $y(0)$, $y'(0)$ E $y''(0)$.

IL DATO INIZIALE CI DICE CHE $y(0)=0$.

SI HA POI:

$$y'(x) = (y^2(x)-1)\,e^{x+y(x)}$$

QUINDI

$$y'(0) = (y^2(0)-1)\,e^{0+y(0)} = (0^2-1)e^{0+0} = -1$$

INFINE:

$$y''(x) = \left((y^2(x)-1)e^{x+y(x)}\right)' = 2y'(x)y(x)e^{x+y(x)} + (y^2(x)-1)e^{x+y(x)}\cdot(1+y'(x))$$

QUINDI

$$y''(0) = 2y'(0)y(0)\cdot e^{0+y(0)} + (y^2(0)-1)e^{0+y(0)}\cdot(1+y'(0)) =$$

$$= 2\cdot(-1)\cdot 0\cdot e^{0+0} + (0^2-1)e^{0+0}\cdot(1+(-1)) = 0$$

QUINDI:

$$P(x) = 0 + (-1)x + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot x^2 = -x$$

② PREMETTIAMO CHE, ESSENDO $\cos^2(2y)$ LIPSCHITZIANA, VALE IL TEO. DI ESIST. E UNICITÀ LOCALE, QUINDI OGNI VOLTA CHE SAREMO IN GRADO DI ESIBIRE UNA SOLUZIONE PER UN CERTO $y_0$, QUESTA SARÀ L'UNICA.
AD ESEMPIO, PER $y_0 = \frac{\pi}{4}$ È OVVIO CHE LA FUNZIONE COSTANTE $y_1(x) \equiv \frac{\pi}{4}$ È SOLUZIONE, VISTO CHE PER $y = \frac{\pi}{4}$ IL II° MEMBRO SI ANNULLA, QUINDI OLTRE A LEI NON CE NE SONO ALTRE
CERCHIAMO ORA LE SOLUZIONI $y_2(x)$ E $y_3(x)$ CON DATI INIZIALI RISPETTIVAMENTE $y_0 = 0$ E $y_0 = \frac{\pi}{2}$, CHE SONO ENTRAMBI DEI VALORI CHE NON ANNULLANO IL II° MEMBRO. SAPPIAMO CHE OGNI SOL. $y(x)$ CON DATO INIZIALE DI QUESTO TIPO, FINCHÈ ESISTE NON INTERSECA LE SOLUZIONI COSTANTI, QUINDI SI HA SEMPRE:

$$\cos^2(2y(x)) \neq 0$$

QUINDI L'EQUAZIONE PUÒ ESSERE RISCRITTA:

$$\frac{2\,y'(x)}{\cos^2(2y(x))} = \frac{2}{1+x^2}$$

CIOÈ:

$$\Big(\tan(2y(x))\Big)' = \Big(2\cdot\arctan x\Big)'$$

CIOÈ:

(3) $$\tan(2y(x)) = 2\cdot\arctan x + c \qquad (\text{con } c\in\mathbb{R})$$

LA (3) VALE SIA PER $y_2(x)$ CHE PER $y_3(x)$.
SE ORA RICORDIAMO CHE $y_2(0)=0$, DALLA (3) RICAVIAMO:

$$\tan(2\cdot y_2(0)) = 2\cdot\arctan 0 + c$$

CIOÈ $c=0$.
QUINDI $y_2(x)$ SODDISFA:

$$\tan(2\cdot y_2(x)) = 2\cdot\arctan x$$

DA CUI, TENENDO CONTO DEL FATTO CHE $y(0)=0$ E QUINDI $-\frac{\pi}{4} < y(x) < \frac{\pi}{4}$, SEGUE:

$$y_2(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(2\arctan x\right)$$

LA VERIFICA DIRETTA CONFERMA CHE $y_2(x)$ È LA SOL. CERCATA PER $y_0 = 0$.

PER $y_3(x)$ PROCEDIAMO IN MODO ANALOGO: DA $y_3(0) = \frac{\pi}{2}$ SEGUE ANCORA CHE NELLA (3) SI HA $c=0$. DUNQUE $y_3(x)$ SODDISFA:

(4)
$$\tan(2y_3(x)) = 2\arctan x$$

STAVOLTA PERÒ, SICCOME $y_3(0) = \frac{\pi}{2}$, $y_3(x)$ È COMPRESA TRA LE 2 SOL. COSTANTI $y \equiv \frac{\pi}{4}$ E $y \equiv \frac{3}{4}\pi$. QUINDI VALE LA STIMA:

$$\frac{\pi}{2} < 2\cdot y_3(x) < \frac{3}{2}\pi$$

E PERCIÒ, QUANDO ESPLICITO (4) RISPETTO A $y_3(x)$, STAVOLTA OTTENGO:

$$y_3(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arctan\left(2\arctan x\right)$$

ANCHE STAVOLTA LA VERIFICA DIRETTA CONFERMA CHE $y_3(x)$ È LA SOLUZIONE CERCATA PER $y_0 = \frac{\pi}{2}$.

## 3

a) PER $x>0$ L'EQUAZIONE, OLTRE ALLE 2 SOL. COSTANTI $y_0 \equiv 0$ E $y_1 \equiv 1$, HA LE SOL. CHE SI OTTENGONO SEPARANDO LE VARIABILI:

$$\frac{y'(x)}{3\left(\sqrt[3]{y^2(x)} - y(x)\right)} = \frac{1}{x}$$

CIOÈ:

$$-\frac{1}{1-\sqrt[3]{y(x)}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2(x)}} \cdot y'(x) = -\frac{1}{x}$$

CIOÈ:

$$\left(\ln\left|1-\sqrt[3]{y(x)}\right|\right)' = \left(-\ln x\right)'$$

CIOÈ:

$$\ln\left|1-\sqrt[3]{y(x)}\right| = c - \ln x \qquad \text{CON } c \in \mathbb{R}.$$

CIOÈ:

$$1-\sqrt[3]{y(x)} = \pm e^c \cdot \frac{1}{x} \qquad \text{CON } c \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

(1) $$y(x) = \left(1-\frac{k}{x}\right)^3 \qquad \text{CON } k \in \mathbb{R}$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE LA (1) SODDISFA L'EQUAZIONE SU $(0,+\infty)$ PER OGNI $k \in \mathbb{R}$.

AFFINCHÉ LA (1) SODDISFI ANCHE IL DATO INIZIALE $Y(1)=-1$
BISOGNA CHE:

$$-1=Y(1)=\left(1-\frac{k}{1}\right)^3=(1-k)^3$$

CHE EQUIVALE A DIRE $k=2$.

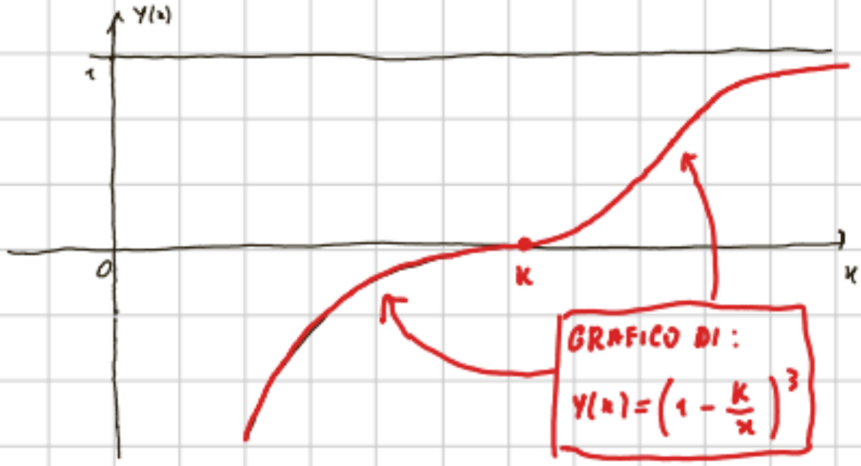
PER $k=2$ LA (1) DIVENTA:

(2) $$Y(x)=\left(1-\frac{2}{x}\right)^3$$

QUINDI UNA SOL. MASSIMALE DEL PROB. DI CAUCHY È $\left(Y(x),(0,+\infty)\right)$ CON $Y(x)$ DATO DA (2).

$\boxed{b}$ SICCOME $3(\sqrt[3]{y^2}-y)$ NON È LOCALMENTE LIPSCHITZIANA, LA SOL. TROVATA PER IL PROB. DI CAUCHY POTREBBE NON ESSERE L'UNICA.

PER TROVARE LE ALTRE OSSERVIAMO IL GRAFICO DI (2):




IN PARTICOLARE SI OSSERVI CHE PER OGNI FISSATO $k>0$, LA (2) HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

(3) $\lim_{x\to 0^+} Y(x)=-\infty$

(4) $\lim_{x\to +\infty} Y(x)=1$

(5) $Y(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE E INTERSECA L'ASSE $x$ PER $x=k$.

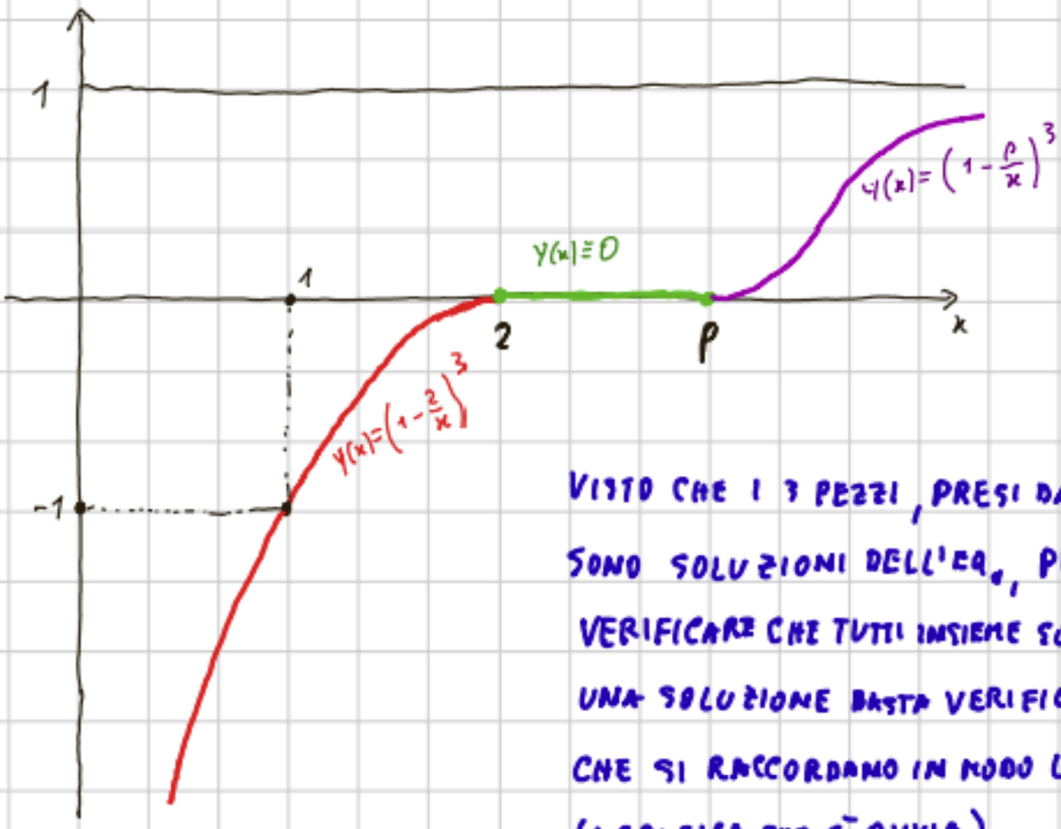
(6) NEL PUNTO $x=k$ LA $Y(x)$ HA UN FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE.

GRAZIE A QUESTE PROPRIETÀ E AL FATTO CHE ANCHE LA FUNZIONE COSTANTE $y_0(x) \equiv 0$ SODDISFA L'EQUAZIONE POSSIAMO COSTRUIRE INFINITE SOL. DEL PROB. DI CAUCHY NEL MODO SEGUENTE:

PER OGNI $\rho \geq 2$ SIA:

(7) $$y_\rho(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{2}{x}\right)^3 & \text{PER } 0<x\leq 2 \\ 0 & \text{PER } 2<x<\rho \\ \left(1-\frac{\rho}{x}\right)^3 & \text{PER } x\geq\rho \end{cases}$$

È FACILE VERIFICARE CHE PER OGNI $\rho \geq 2$, $y_\rho(x)$ È SOL. DEL PROB. DI CAUCHY. IL GRAFICO DI $y_\rho(x)$ È IL SEGUENTE:




VISTO CHE I 3 PEZZI, PRESI DA SOLI SONO SOLUZIONI DELL'EQ., PER VERIFICARE CHE TUTTI INSIEME SONO UNA SOLUZIONE BASTA VERIFICARE CHE SI RACCORDANO IN MODO LISCIO. (VERIFICA CHE È OVVIA)

---

OLTRE A QUELLE DATE DA (7) NON CI SONO ALTRE SOLUZIONI PER IL PROBLEMA DI CAUCHY PERCHÉ È SOLO NEI PUNTI DELL'ASSE $x$ CHE VIENE MENO IL TEOREMA DI UNICITÀ.

4

a) IL POLINOMIO CARATTERISTICO DELL'EQUAZIONE È:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = \dots = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

PER CUI LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

(3) $$y(x) = \alpha e^{-2x} + (\beta x + \gamma) e^x \quad \text{CON } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

SICCOME IL TERMINE NON OMOGENEO È:

$$(3x+4)e^x$$

E $\lambda = 1$ È RADICE DI $P(\lambda)$ CON MOLTEPLICITÀ 2, CERCHIAMO ORA UNA SOL. PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA DEL TIPO:

(4) $$y_0(x) = x^2 (Ax+B) e^x = (Ax^3 + Bx^2) e^x$$

DERIVANDO RIPETUTAMENTE LA (4) SI OTTIENE:

$$y_0'(x) = \left(Ax^3 + (3A+B)x^2 + 2Bx\right) e^x$$

$$y_0''(x) = \left(Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B\right) e^x$$

$$y_0'''(x) = \left(Ax^3 + (9A+B)x^2 + (18A+6B)x + 6A+6B\right) e^x$$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE, I TERMINI CON $x^3$ E $x^2$ SCOMPAIONO E SI OTTIENE:

$$\left(18A \cdot x + 6A + 6B\right)e^x = (3x+4)e^x$$

QUINDI DEVE ESSERE:

$$\begin{cases} 18A = 3 \\ 6A + 6B = 4 \end{cases}$$

CHE HA SOLUZIONI $A = \frac{1}{6}$ E $B = \frac{1}{2}$.

QUINDI:

$$y_0(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x$$

E PERCIÒ LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = \alpha e^{-2x} + (\beta x + \gamma)e^x + \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{17}{24}x^2\right)e^x \quad \text{CON } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$\boxed{b}$ DOBBIAMO TROVARE UN OPERATORE DIFFERENZIALE $\mathcal{L}$ A COEFFICIENTI COSTANTI TALE CHE:

(5) $$\mathcal{L}\left(\frac{1}{8}x^2e^x - \frac{3}{2}xe^{-x}\right) = (3x+4)e^x$$

CIOÈ TALE CHE

(6) $$\mathcal{L}\left(\frac{1}{8}x^2e^x\right) - \mathcal{L}\left(\frac{3}{2}xe^{-x}\right) = (3x+4)e^x$$

SICCOME $\mathcal{L}$ HA LA PROPRIETÀ CHE $\mathcal{L}(p(x)e^{\lambda x}) = q(x)e^{\lambda x}$
LA (6) EQUIVALE ALLE 2 CONDIZIONI

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{8}x^2e^x\right) = (3x+4)e^x \quad \text{E} \quad \mathcal{L}\left(\frac{3}{2}xe^{-x}\right) = 0$$

DA CUI SI DEDUCE CHE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $\mathcal{L}$ HA LA RADICE $\lambda = 1$ CON MOLTEPLICITÀ 1 E $\lambda = -1$ CON MOLTEPLICITÀ 2. QUINDI $\mathcal{L}$ È DELLA FORMA:

(7)
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' \circ (D - I) \circ (D + I)^2$$

DOVE $D$ È L'OPERATORE DERIVATA, $I$ È L'OPERATORE IDENTITÀ E $\mathcal{L}'$ È UN OPERATORE DA DETERMINARE.
OSSERVIAMO CHE:

$$(D-I)(D+I)^2\left(\frac{3}{2}xe^{-x}\right) = (D-I)(0) = 0$$

E CHE:

$$(D-I)(D+I)^2\left(\frac{1}{8}x^2e^x\right) = (D+I)^2\left(\frac{x}{4}e^x\right) = (D+I)\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)e^x\right) = (x+1)e^x$$

QUINDI, GRAZIE ALLA (7), LA (5) DIVENTA:

(8)
$$\mathcal{L}'\left((x+1)e^x\right) = (3x+4)e^x$$

VISTO CHE $(x+1)$ E $(3x+4)$ HANNO GRADO 1, CERCHIAMO $\mathcal{L}'$ DI ORDINE 1 CHE SODDISFI (8), CIOÈ DELLA FORMA:

$$\mathcal{L}' = (aD + bI) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

UN TALE $\mathcal{L}'$ SODDISFA (8) SE E SOLO SE:

$$(aD + bI)\left((x+1)e^x\right) = (3x+4)e^x$$

CIOÈ:

$$\big((a+b)x+(2a+b)\big)e^x=(3x+4)e^x$$

DA CUI SEGUE:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=4 \end{cases}$$

CHE HA SOLUZIONI $a=1$ E $b=2$.

DA CUI SEGUE $\mathcal{L}'=(D+2I)$ E QUINDI:

$$\mathcal{L}=(D+2I)\circ(D-I)\circ(D+I)^2$$

QUINDI L'EQ. CERCATA E:

$$y^{(4)}+3y'''+y''-3y'-2y=(3x+4)e^x$$

5

a) IL POLINOMIO CARATTERISTICO È $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ CHE HA RADICI $\lambda = 1$ E $\lambda = 2$, ENTRAMBE CON MOLTEPLICITÀ 1. QUINDI LA SOL. GENERALE DELLA OMOGENEA ASSOCIATA È:

(10) $$y_L(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ORA, SICCOME IL TERMINE NON OMOGENEO È COMBINAZIONE LINEARE DI $\cos x$ ED $e^x$, E $\lambda = 1$ È RADICE DEL POL. CARATTERISTICO CON MOLTEPLICITÀ 1, CI SARÀ UNA SOL. PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA DEL TIPO:

(11) $$y_0(x) = A\cos x + B\sin x + Cxe^x$$

PER OPPORTUNI $A, B, C \in \mathbb{R}$.

DERIVIAMO (11) E SOSTITUIAMO NELL'EQUAZIONE:

$$y_0'(x) = -A\sin x + B\cos x + C(x+1)e^x$$

$$y_0''(x) = -A\cos x - B\sin x + C(x+2)e^x$$

SI OTTIENE:

$$-A\cos x - B\sin x + C(x+2)e^x - 3\left(-A\sin x + B\cos x + C(x+1)e^x\right) + 2\left(A\cos x + B\sin x + Cxe^x\right) = 10\cos x + e^x$$

CIOÈ:

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x - Ce^x = 10\cos x + e^x$$

DA CUI SEGUE:

$$A - 3B = 10, \quad 3A + B = 0 \quad \text{E} \quad -C = 1$$

OVVERO:

$$A = 1, \quad B = -3 \quad \text{E} \quad C = -1.$$

QUINDI LA SOL. PARTICOLARE TROVATA PER LA NOSTRA EQUAZIONE È:

$$y_0(x) = \cos x - 3\sin x - xe^x$$

DI CONSEGUENZA, LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = y_L(x) + y_0(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} + \cos x - 3\sin x - xe^x \quad \text{CON } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{b}$ L'OPERATORE DIFF. LINEARE A COEFF. COSTANTI REALI DI ORDINE MINIMO CHE, APPLICATO A $y(x)$, LA ANNULLA DEVE AVERE IL POLINOMIO CARATTERISTICO CON LE RADICI:

$\lambda = 1$ CON MOLTEPLICITÀ 2

$\lambda = 2$ " " " 1

$\lambda = i$ " " " 1

IL POL. A COEFF. REALI DI GRADO MINIMO CON TALI RADICI È:

$$P(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda^2+1) = \lambda^5 - 4\lambda^4 + 6\lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

QUINDI L'EQUAZIONE CERCATA È:

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 6y^{(3)} - 6y'' + 5y' - 2y = 0$$

6

a FINCHÉ VALE LA CONDIZIONE $-1<y(x)<0$, VALGONO I SEGUENTI PASSAGGI:

$$y'(x) = y(x)\ln(y^2(x)) \iff y'(x) = 2y(x)\ln(-y(x)) \iff \dots$$

$$\dots \iff \frac{1}{\ln(-y(x))}\cdot\frac{y'(x)}{y(x)} = 2 \iff \left(\ln(-\ln(-y(x)))\right)' = 2 \iff$$

$$\iff \ln\left(-\ln\left(-y(x)\right)\right) = 2x + c \quad \text{CON} \quad c \in \mathbb{R}.$$

DALLA CONDIZIONE $y(0) = -\frac{1}{e}$ SEGUE QUINDI

$$\ln\left(-\ln\left(\tfrac{1}{e}\right)\right) = 2\cdot 0 + c$$

CIOÈ $c = \ln(\ln e) = 0$.

SI OTTIENE QUINDI:

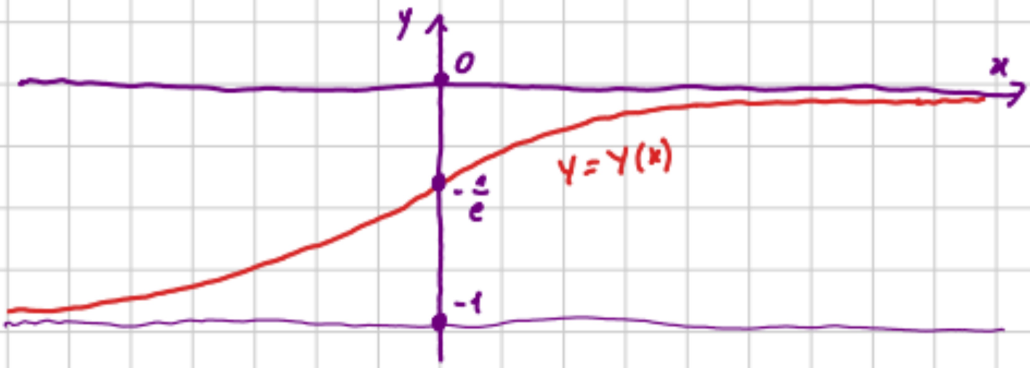
$$\ln\left(-\ln\left(-y(x)\right)\right) = 2x$$

DA CUI SEGUE:

$$y(x) = -e^{-e^{2x}}.$$

SI NOTI CHE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ SI HA $-1<y(x)<0$ E QUINDI VALGONO LE CONDIZIONI PER LE QUALI I CALCOLI FATTI SONO VALIDI.
SI NOTI CHE $y(x)$ È CRESCENTE ED HA ASINTOTO ORIZZONTALE $y=0$ A $+\infty$ E $y=-1$ A $-\infty$:

(10)



$\boxed{b}$ SI NOTI CHE L'EQ. DIFF. ASSEGNATA È AUTONOMA, CIOÈ DELLA FORMA $y' = F(y)$ CON $F$ CHE NON DIPENDE DA $x$.

DI CONSEGUENZA, SE $Y(x)$ È SOLUZIONE, LO È ANCHE OGNI SUA TRASLATA ORIZZONTALE, CIOÈ OGNI FUNZIONE $v(x)$ DEL TIPO:

$$v(x) = Y(x+a) \qquad \text{CON } a \in \mathbb{R}.$$

QUESTO PERCHÉ:

$$v'(x) = Y'(x+a) \cdot 1 = F(Y(x+a)) = F(v(t))$$

MA PER COME È FATTA $Y(x)$ (VEDI FIG. (10)), LE SUE TRASLATE ORIZZONTALI RIEMPIONO LA STRISCIA $\mathbb{R} \times (-1,0)$, OVVERO:

$$\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}\times(-1,0) \ \exists a \in \mathbb{R} \text{ T.C. } y = Y(x+a) \text{ PASSA PER } (x_0,y_0).$$

PER QUANTO APPENA DETTO TALE FUNZIONE È SOL. DEL PROB. DI CAUCHY:

$$(11) \qquad \begin{cases} y' = y \ln(y^2) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ED È L'UNICA, GRAZIE AL T. DI UNICITÀ.

QUINDI PER OGNI $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (-1,0)$ LA SOL. DI (11) È UNA TRASLATA DI $Y(x)$.

7A (a) IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $\mathcal{L}$ È:

$$P(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

LE CUI RADICI SONO 1, $i$ E $-i$, QUINDI LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$y(x)=Ae^x+B\cos x+C\sin x \qquad A,B,C\in\mathbb{R}$$

ORA, POICHÉ 2 NON È RADICE DI $P(\lambda)$, CERCHIAMO UNA SOL PARTICOLARE DI $\mathcal{L}(y)=e^{2x}$ TRA LE FUNZIONI DEL TIPO $y_0(x)=ce^{2x}$, MA SICCOME SI HA:

$$\mathcal{L}(ce^{2x})=8ce^{2x}-4ce^{2x}+2ce^{2x}-ce^{2x}=5ce^{2x}$$

PER OTTENERE $\mathcal{L}(ce^{2x})=e^{2x}$ DEVE ESSERE $c=\frac{1}{5}$, QUINDI $y_0(x)=\frac{1}{5}e^{2x}$ E

DUNQUE LA SOL. GENERALE DI $\mathcal{L}(y)=e^{2x}$ È:

(3) $$y(x)=Ae^x+B\cos x+C\sin x+\frac{1}{5}e^{2x} \qquad \text{CON } A,B,C\in\mathbb{R}$$

(b) DERIVANDO RIPETUTAMENTE (3) SI OTTIENE:

$$y'(x)=Ae^x-B\sin x+C\cos x+\frac{2}{5}e^{2x}$$

$$y''(x)=Ae^x-B\cos x-C\sin x+\frac{4}{5}e^{2x}$$

QUINDI LE CONDIZIONI INIZIALI $y(0)=\frac{1}{5}$, $y'(0)=\frac{2}{5}$ E $y''(0)=\frac{4}{5}$ DIVENTANO:

$$\begin{cases} A+B+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\\ A+C+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\\ A-B+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\end{cases}$$

DA CUI SEGUE $A=B=C=0$. QUINDI LA SOL. CERCATA È $y(x)=\frac{1}{5}e^{2x}$.

(c) AFFINCHÉ LA $y(x)$ DATA DA (3) SIA POSITIVA È NECESSARIO CHE $B=C=0$, ALTRIMENTI IL TERMINE $B\cos x+C\sin x$ OSCILLEREBBE TRA $-\sqrt{B^2+C^2}$ E $\sqrt{B^2+C^2}$ QUINDI, PER $x\to-\infty$, $y(x)$ SAREBBE FREQUENTEMENTE NEGATIVA PERCHÉ I TERMINI RIMANENTI SONO INFINITESIMI.

QUINDI $y(x)$ È DELLA FORMA

(4) $$y(x)=Ae^x+\frac{1}{5}e^{2x}=e^x\left(A+\frac{1}{5}e^x\right)$$

DALLA (4) SEGUE CHE, SE FOSSE $A<0$, SI AVREBBE $y(x)<0$ SU UN'OPPORTUNA SEMIRETTA SINISTRA. QUINDI, PER AVERE $y(x)>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ BISOGNA CHE NELLA (4) SIA $A \geq 0$. IL FATTO CHE TALE CONDIZIONE SIA ANCHE SUFFICIENTE È OVVIO.

(d) ABBIAMO GIÀ VISTO NEL PUNTO (a) CHE $\mathcal{L}(ce^{2x}) = \frac{1}{5}ce^{2x}$, QUINDI

$$\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}(ce^{2x}) = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot ce^{2x}.$$

DI CONSEGUENZA UNA SOL. PARTICOLARE È $y_0(x) = \frac{1}{625}e^{2x}$.

INOLTRE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\mathcal{L}$ È $(p(\lambda))^4$ DOVE $p(\lambda)$ È IL POL. CARATTERISTICO DI $\mathcal{L}$. QUINDI LE RADICI DI $(p(\lambda))^4$ SONO:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = i \\ \lambda = -i \end{array}\right\} \text{TUTTE CON MOLTEPLICITÀ } 4.$$

LA SOL. GENERALE È PERCIÒ:

$$y(x) = (A+Bx+Cx^2+Dx^3)e^x + (a+bx+cx^2+dx^3)\cos x + (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)\sin x + \frac{1}{625}e^{2x}$$

CON $A, B, C, D, a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

7B

ANCHE STAVOLTA IL PROCEDIMENTO È IDENTICO A QUELLO DELLA $\boxed{\text{VERSIONE A}}$ E LE DIFFERENZE RIGUARDANO SOLO I DATI NUMERICI.

(a) IL POL. CARATTERISTICO È $p(\lambda) = \lambda^3+2\lambda^2+4\lambda+8 = (\lambda^2+4)(\lambda+2)$ E LA SOL. PARTICOLARE È $y_0(x) = \frac{1}{5}e^{-x}$, QUINDI LA SOL. GEN. È:

$$y(x) = Ae^{-2x} + B\cos 2x + C\sin 2x + \frac{1}{5}e^{-x} \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$$

(b) I DATI INIZIALI CORRISPONDONO AL CASO $A=B=C=0$ CIOÈ $y(x) = \frac{1}{5}e^{-x}$.

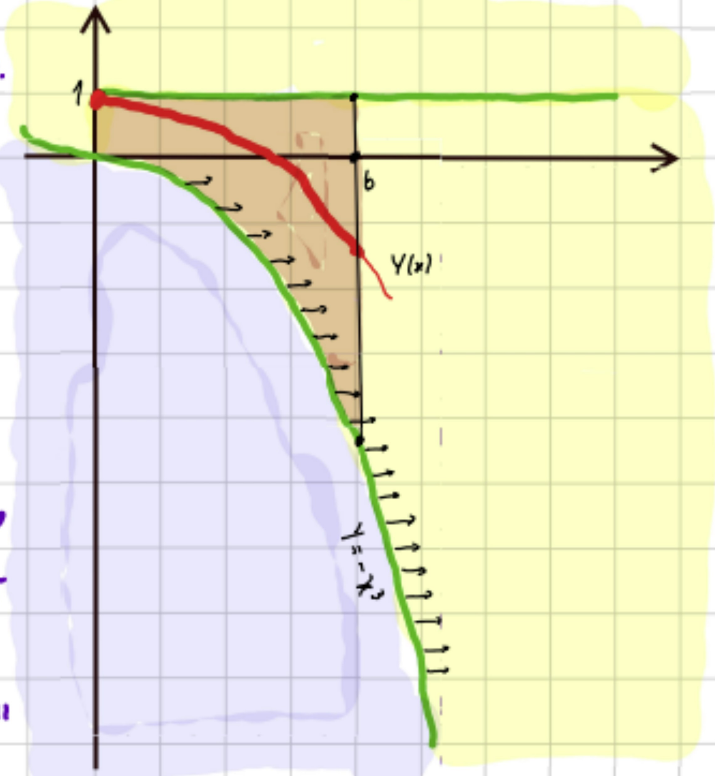
(c) $(y(x)>0 \ \forall x \in \mathbb{R}) \iff (B=C=0 \text{ e } A \geq 0)$

(d) LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = (A+Bx+Cx^2+Dx^3)e^{-2x} + (a+bx+cx^2+dx^3)\cos 2x + (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)\sin 2x + \frac{1}{625}e^{-x}$$

**8**

(a) IL SECONDO MEMBRO DELL'EQUAZ. SI ANNULLA SUI PUNTI DELLA CURVA $y=-x^3$, CHE QUINDI, PER $x>0$ È UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA, VISTO CHE $(-x^3)' = -3x^2 < 0$.
INVECE IL II MEMBRO DELL'EQUAZ. È POSITIVO NELLA ZONA AZZURRA, CIOÈ $U=\{(x,y) \mid y<-x^3\}$ E NEGATIVO NELLA ZONA GIALLA/ARANCIONE, CIOÈ $V=\{(x,y) \mid y>-x^3\}$.
SI NOTI CHE PROLUNGANDO IN AVANTI




LA NOSTRA SOL. $Y(x)$, GRAZIE AL TEO. DELLA SOTTOSOLUZIONE, NON PUÒ MAI INTERSECARE $y=-x^3$. QUINDI IL GRAFICO DI $Y(x)$ RIMANE SEMPRE NELLA ZONA $V$ E QUINDI $Y'(x)<0$. CIÒ SIGNIFICA CHE $Y(x)$, PER $x>0$ FINCHÈ ESISTE È STRETTAMENTE DECRESCENTE E QUINDI $Y(x)<Y(0)=1$.
SIAMO ORA IN GRADO DI DIMOSTRARE CHE $Y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.
INFATTI, SE PER ASSURDO L'INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE AVESSE COME SECONDO ESTREMO $b<+\infty$, ALLORA PER $0<x<b$ IL GRAFICO DI $Y(x)$ SAREBBE CONTENUTO NEL COMPATTO $K=\{(x,y) \mid 0\le x\le b,\ -x^3\le y\le 1\}$ E QUINDI, GRAZIE AL TEO. DI PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI, $Y(x)$ POTREBBE ESSERE PROLUNGATA OLTRE $b$, IN CONTRASTO COL FATTO CHE $b$ È IL II ESTREMO DELL'INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE.
QUINDI $Y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

(b) POICHÈ PER $x>0$ $Y(x)$ DECRESCE, SIAMO CERTI CHE $\lim_{x\to+\infty} Y(x)$ ESISTE.
SE PER ASSURDO NON FOSSE $-\infty$ MA $\ell\in\mathbb{R}$, ALLORA SI AVREBBE:

$$\lim_{x\to+\infty} Y'(x) = \lim_{x\to+\infty} -(x^3+Y(x))^5 = -(+\infty+\ell)^5 = -\infty$$

OTTERREMMO QUINDI CHE $\exists x_0\ge 0$ TALE CHE $Y'(x)<-1$ PER $x\ge x_0$.

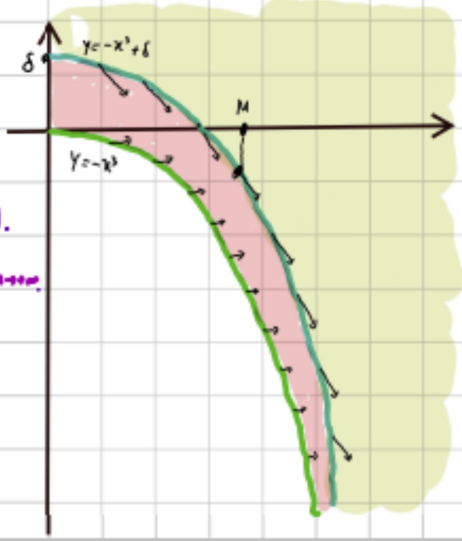
MA ALLORA $\forall x > x_0$ SI HA:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt < y(x_0) + \int_{x_0}^{x} -1\,dt = y(x_0) - (x - x_0) \longrightarrow -\infty \quad \text{PER } x \to +\infty$$

CHE CONTRADDICE L'ASSUNZIONE $y(x) \to \ell$.

QUINDI PER $x \to +\infty$ DEVE ESSERE $y(x) \to -\infty$.

(C) PER OGNI FISSATO $\delta > 0$, CONSIDERIAMO LA CURVA $y = -x^3 + \delta$ (GRAFICO AZZURRO IN FIGURA). LA SUA DERIVATA È $-3x^2$, CHE TENDE A $-\infty$ PER $x \to +\infty$. INVECE NEI SUOI PUNTI IL II MEMBRO DELL'EQUAZ. HA VALORE COSTANTE $-\delta^5$. QUINDI $\exists M > 0$ TALE CHE PER $x > M$ LA CURVA $y = -x^3 + \delta$ È UNA SOTTOSOLUZIONE.




CIÒ SIGNIFICA CHE PER $x > M$ OGNI SOLUZIONE DELL'EQUAZ. PUÒ INTERSECARLA AL MASSIMO UNA VOLTA. DI CONSEGUENZA ANCHE LA SOL. $y(x)$ DEL NOSTRO P. DI CAUCHY PER $x \to +\infty$ SODDISFERÀ UNA DELLE 2 CONDIZIONI:

(5) $y(x) > -x^3 + \delta$ (6) $y(x) < -x^3 + \delta$

MA (6) NON PUÒ VALERE DEFINITIVAMENTE, ALTRIMENTI ESISTEREBBE $\bar{x} > 0$ TALE CHE PER $x > \bar{x}$ SI AVREBBE:

$$y'(x) = -\left(x^3 + y(x)\right)^5 > -\delta^5$$

DA CUI SEGUIREBBE:

$$y(x) = y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} y'(t)\,dt > y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} -\delta^5\,dt = y(\bar{x}) - \delta^5 (x - \bar{x})$$

CHE CONTRADDICE (6) IN QUANTO, PER $x \to +\infty$, DEFINITIVAMENTE SI HA:

$$-x^3 + \delta < y(\bar{x}) - \delta^5 (x - \bar{x})$$

QUINDI DEVE VALERE (5), CIOÈ SI HA CHE:

(7) $$\forall \delta > 0 \ \exists \rho > 0 \text{ TALE CHE } x > \rho \Rightarrow y(x) > -x^3 + \delta$$

MA POICHÉ:

$$y(x) > -x^3 + \delta \Rightarrow y'(x) = -\left(x^3 + y(x)\right)^5 < -\delta^5$$

LA (7) DIVENTA:

$$\forall \delta > 0 \ \exists \rho > 0 \text{ TALE CHE } x > \rho \Rightarrow y'(x) < -\delta^5$$

CHE SIGNIFICA APPUNTO CHE $y'(x) \to -\infty$ PER $x \to +\infty$.

9

IL POLINOMIO CARATTERISTICO È:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda^2+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

QUINDI LA SOL. GENERALE È

$$Y(x) = A\cos x + B\sin x + Ce^x + De^{2x} + Y_0(x) \quad \text{CON } A,B,C,D \in \mathbb{R}$$

DOVE $Y_0(x)$ È UNA SOL. PARTICOLARE DA DETERMINARE.

CERCHIAMOLA DELLA FORMA $Y_0(x) = K \cdot e^{3x}$. SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE SI TROVA:

$$81ke^{3x} - 3\cdot 27ke^{3x} + 3\cdot 9ke^{3x} - 3\cdot 3ke^{3x} + 2\cdot ke^{3x} = 20e^{3x}$$

CIOÈ:

$$20ke^{3x} = 20e^{3x}$$

DA CUI SEGUE $K=1$. QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$Y(x) = A\cos x + B\sin x + Ce^x + De^{2x} + e^{3x} \quad \text{CON } A,B,C,D \in \mathbb{R}.$$

---

(a) SE A E B NON SONO ENTRAMBE NULLE IL TERMINE $A\cos x + B\sin x$ È PERIODICO E CONTINUA AD OSCILLARE TRA DUE VALORI $\rho$ E $-\rho$.

QUINDI, SICCOME GLI ALTRI TERMINI DI $Y(x)$ SONO INFINITESIMI PER $x \to -\infty$, AFFINCHÉ $Y(x) \to 0$ PER $x \to -\infty$ BISOGNA CHE $A=B=0$.

A QUESTO PUNTO, SE FOSSE $C \neq 0$, PER $x \to -\infty$ SI AVREBBE $Y(x) \simeq Ce^x$, CHE NON È $o(e^{2x})$. QUINDI DEVE ESSERE $C=0$.

INFINE DEVE ESSERE ANCHE $D=0$, ALTRIMENTI $Y(x) \simeq De^{2x}$, CHE NON È $o(e^{2x})$. D'ALTRA PARTE, SE $A=B=C=D$ SI HA $Y(x) = e^{3x} = o(e^{2x})$.

QUINDI L'UNICA SOL. CHE VA BENE È $Y(x) = e^{3x}$.

(b) DEVE ESSERE $A=B=0$ ALTRIMENTI IL TERMINE $A\cos x + B\sin x$ È PERIODICO E ASSUME ANCHE VALORI NEGATIVI QUINDI, SICCOME GLI ALTRI TERMINI DI $y(x)$ SONO INFINITESIMI PER $x \to -\infty$, ANCHE $y(x)$ ASSUME FREQUENTEMENTE VALORI NEGATIVI PER $x \to -\infty$.

APPURATO CHE DEVE ESSERE $A=B=0$, SI OTTIENE ANCHE CHE $C \geq 0$, PERCHÉ ALTRIMENTI, PER $x \to +\infty$ SI AVREBBE $y(x) \simeq Ce^x < 0$.

MA, PER $A=B=0$ E $C \geq 0$, $y(x)$ SI PUÒ RISCRIVERE NEL MODO SEGUENTE

$$y(x) = Ce^x + De^{2x} + e^{3x} = e^x \cdot \left(e^{2x} + De^x + C\right) =$$

$$= e^x \left( (e^x)^2 - 2\sqrt{C} \cdot e^x + C + (D + 2\sqrt{C}) e^x \right) =$$

$$= e^x \cdot \left(e^x - \sqrt{C}\right)^2 + (D + 2\sqrt{C}) e^{2x}$$

DA CUI SI DEDUCE CHE $y(x) > 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ SE E SOLO SE:

$$\left(C = 0 \text{ e } D \geq 0\right) \; \sigma \; \left(C > 0 \text{ e } D > -2\sqrt{C}\right)$$

10 (a) PER $A=1$ L'EQUAZIONE DIVENTA:

(1) $$y' = 3\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot e^{x\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{y}}$$

CHE È A VARIABILI SEPARABILI ED È DEFINITA NEL I° QUADRANTE, CIOÈ IN $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0 \text{ e } y\geq 0\}$. ATTENZIONE CHE LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ VIENE MENO NEI PUNTI CON $y=0$, QUINDI LA SOLUZIONE COSTANTE $y(x)\equiv 0$ PUÒ ESSERE INTERSECATA.

TROVIAMO LE ALTRE SOL. SEPARANDO LE VARIABILI. FINCHÉ $y(x)\neq 0$ LA (1) SI PUÒ SCRIVERE:

$$e^{\sqrt{y(x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y(x)}}\cdot y'(x) = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{x}\cdot e^{x\sqrt{x}}$$

CIOÈ:

$$\left(e^{\sqrt{y(x)}}\right)' = \left(e^{x\sqrt{x}}\right)'$$

CIOÈ:

(2) $$e^{\sqrt{y(x)}} = e^{x\sqrt{x}} + k \quad \text{CON } k\in\mathbb{R}$$

SE $y(1)=1$ LA (2) IMPLICA $e=e+k$, DA CUI SEGUE $k=0$ E QUINDI SI OTTIENE LA SOLUZIONE:

(3) $$y(x) = x^3$$

CHE SODDISFA L'EQUAZIONE PER OGNI $x\geq 0$.

INVECE, SE $y(1)=\ln^2(e+1)$, PER $x=1$ LA (2) DIVENTA $e+1=e+k$, DA CUI SEGUE CHE $k=1$ E QUINDI LA SOL. CHE SI OTTIENE DA (2) È

$$y(x) = \ln^2\left(e^{x\sqrt{x}}+1\right)$$

CHE PURE SODDISFA L'EQUAZIONE PER OGNI $x\geq 0$.

INFINE, SE $y(1)=\ln^2(e-1)$, PER $x=1$ LA (2) DIVENTA $e-1=e+k$, DA CUI SEGUE $k=-1$ E QUINDI

$$y(x) = \ln^2\left(e^{x\sqrt{x}}-1\right)$$

STAVOLTA PERÒ $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE SOLO PER $x \geq \sqrt[3]{\ln^2 x}$

TUTTAVIA È IMMEDIATO VERIFICARE CHE PER $x = \sqrt[3]{\ln^2 x}$

$y(x)$ È TANGENTE ALLA SOLUZIONE COSTANTE NULLA.

BASTA QUINDI PRENDERE

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{PER } 0 \leq x < \sqrt[3]{\ln^2 2} \\ \ln^2(e^{x\sqrt{x}} - 1) & \text{PER } x \geq \sqrt[3]{\ln^2 2} \end{cases}$$

IN TAL MODO $y(x)$ È SOL. DI CLASSE $C^1$ DELL'EQUAZIONE PER OGNI $x \geq 0$ E SODDISFA $y(1) = \ln^2(e-1)$.

(b) CONSIDERIAMO IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{xy - \frac{1}{2}}\, e^{x\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

E SIA $y(x)$ LA SUA SOLUZIONE.

SI VERIFICA SUBITO CHE LA FUNZIONE COSTANTE UGUALE A 1 È UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA; QUINDI PER $x > 1$, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE, SI HA

$$y(x) > 1.$$

INOLTRE, GRAZIE AL T. DEL CONFRONTO, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE, PER $x > 1$, $y(x)$ È MAGGIORATA DALLA SOL. DEL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{xy}\, e^{x\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

CHE È DATA DA (3). DI CONSEGUENZA PER $x > 1$, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE SI HA

$$1 < y(x) < x^3 \tag{4}$$

SIAMO ORA IN GRADO DI DIMOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$. INFATTI SE PER ASSURDO COSÌ NON FOSSE, L'ESTREMO

SUPERIORE DELL'INTERVALLO DI ESISTENZA MASSIMALE SAREBBE $b<+\infty$

QUINDI $y(x)$ RISTRETTA A $[1,b)$ NON SAREBBE PROLUNGABILE A DESTRA DI $b$. MA, GRAZIE A (4), IL GRAFICO DI $y(x)$ È CONTENUTO NEL COMPATTO

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le b,\ 1\le y\le x^3\}$$

QUINDI IL TEO. DI PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI GARANTISCE LA PROLUNGABILITÀ DI $y(x)$ OLTRE $b$.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE $b<+\infty$.

QUINDI $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

MOSTRIAMO ORA CHE $y(x)\to+\infty$ PER $x\to+\infty$.

POICHÈ IL II° MEMBRO DELL'EQUAZIONE È POSITIVO, $y(x)$ È CRESCENTE, QUINDI SAPPIAMO CHE PER $x\to+\infty$ SI HA

(5) $$y(x)\to\sup\{y(x) \mid x\ge 1\}=\ell\ge y(1)=1$$

SE PER ASSURDO FOSSE $\ell<+\infty$, ALLORA SI AVREBBE:

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x)=\lim_{x\to+\infty} 3\sqrt{xy-\frac{1}{2}}\, e^{x\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{y}}\ge$$

$$\ge\lim_{x\to+\infty} 3\sqrt{x\cdot 1-\frac{1}{2}}\, e^{x\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{\ell}}=+\infty$$

QUINDI $y'(x)\to+\infty$ PER $x\to+\infty$, PERCIÒ $\exists\, x_0\ge 1$ TALE CHE $y'(x)\ge 1$ PER $x\ge x_0$. DI CONSEGUENZA, $\forall x\ge x_0$ SI HA:

$$y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt\ge\int_{x_0}^{x} 1\,dt=x-x_0$$

QUINDI

$$y(x)\ge \left(y(x_0)+x-x_0\right)\longrightarrow+\infty \quad \text{PER } x\to+\infty$$

IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $\ell=\sup\{y(x) \mid x\ge 1\}<+\infty$.

QUINDI NELLA (5) DEVE ESSERE $\ell=+\infty$.

**11**

**(a)** $F(x,y) = |1-y^2|^{1+|x|}$ SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ.

PER VERIFICARLO BASTA OSSERVARE CHE, PER OGNI FISSATO $x_0 \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE $y$ DATA DA $F(x_0, y)$ È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$ ED È $C^1$ A TRATTI, CON LA DERIVATA CHE SULL'INTERVALLO $[-a, a]$ (CON $a > \sqrt{2}$) HA MASSIMO $2(1+|x|)\, a\, (a^2-1)^{|x|}$.

DA CIÒ SEGUE CHE, SE $\Omega = \{(x,y) \mid |x| < b,\ |y| < a\}$, CON $a > \sqrt{2}$, ALLORA:

$$\forall (x,y_1), (x,y_2) \in \Omega \quad |F(x,y_1) - F(x,y_2)| < L\, |y_1 - y_2|$$

DOVE $L = 2a(1+b)(a^2-1)^b$.

QUINDI $F(x,y)$ SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ SU TUTTO $\mathbb{R}^2$.

---

GRAZIE A CIÒ VALE IL T. DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE E, DI CONSEGUENZA, LA SOLUZIONE $y(x)$ CHE SODDISFA $y(0)=0$ NON PUÒ INTERSECARE LE 2 SOL. COSTANTI $y \equiv 1$ E $y \equiv -1$.

VEDI UNA QUALSIASI DEGLI SCRITTI SCORSI

DUNQUE, FINCHÉ $y(x)$ ESISTE, RIMANE CONFINATA NELLA STRISCIA $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < 1\}$. QUESTO FATTO, COMBINATO NEL SOLITO MODO COL TEOREMA DI PROLUNGABILITÀ FUORI DAI COMPATTI, CI PERMETTE DI DIMOSTRARE LA PROLUNGABILITÀ A TUTTO $\mathbb{R}$ DI $y(x)$.

**(b)** DOBBIAMO MOSTRARE CHE LA FUNZIONE $v(x) = -y(-x)$ COINCIDE CON $y(x)$.

A TALE SCOPO BASTA DIMOSTRARE CHE ANCHE $v(x)$ SODDISFA LO STESSO PROB. DI CAUCHY DI $y(x)$ E POI INVOCARE IL T. DI UNICITÀ.

PER COMINCIARE IL DATO INIZIALE È:

$$v(0) = -y(-0) = -y(0) = -0 = 0$$

PER L'EQUAZIONE SI HA:

$$v'(x) = (-y(-x))' = -y'(-x)\cdot(-1) = y'(-x) = \left|1 - (y(-x))^2\right|^{1+|-x|} =$$

$$= \left|1 - (-y(-x))^2\right|^{1+|x|} = \left|1 - (v(x))^2\right|^{1+|x|}$$

QUINDI, PER IL T. DI UNICITÀ $y(x)$ E $v(x)$ SONO LA STESSA FUNZIONE, PERCIÒ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ SI HA $y(x) = v(x) = -y(-x)$, OVVERO $y(x)$ È DISPARI.

(c) POICHÉ $y(x)$ È CRESCENTE E, PER $x > 0$, COMPRESA TRA 0 E 1, IL SUO LIMITE $\ell$ PER $x \to +\infty$ ESISTE E SODDISFA $0 < \ell \leq 1$. VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\ell \neq 1$.

SE $\sup\{y(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \leq 1 - \frac{1}{60}$ AVREMO OVVIAMENTE CHE ANCHE $\ell \leq 1 - \frac{1}{60} < 1$, E QUINDI $\ell \neq 1$.

SE INVECE $\sup\{y(x) \mid x \in \mathbb{R}\} > 1 - \frac{1}{60}$ ALLORA ESISTE $x_0 > 0$ T.C.

$y(x_0) = 1 - \frac{1}{60}$ E $1 - \frac{1}{60} < y(x) < 1$ PER $x > x_0$.

MA ALLORA, PER OGNI $x > x_0$ SI HA:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(1 - (y(t))^2\right)^{1+t} dt <$$

$= 1 - 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{3600} < \frac{1}{30}$

$$< 1 - \frac{1}{60} + \int_{x_0}^{x} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{60}\right)^2\right)^{1+t} dt < 1 - \frac{1}{60} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{30}\right)^{1+t} dt <$$

$$< 1 - \frac{1}{60} + \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{30}\right)^{1+t} dt = 1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{30} \cdot \frac{-1}{\ln \frac{1}{30}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{30 \ln 30} < 1 - \frac{1}{60} + \frac{1}{90} = 1 - \frac{1}{180}$$

DUNQUE, DAL FATTO CHE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ SIA $y(x) < 1 - \frac{1}{180}$ SEGUE CHE $\ell \leq 1 - \frac{1}{180} < 1$. IN OGNI CASO, QUINDI, $\ell \neq 1$.

**12** **(a)** IL POLINOMIO CARATTERISTICO È

$$P(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 + 5\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda^2+1)(\lambda^2+4)$$

LE CUI RADICI SONO $\lambda = 1$, $\lambda = \pm i$, $\lambda = \pm 2i$, TUTTE CON MOLTEPLICITÀ 1,

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$Y(x) = A e^x + B \sin x + C \cos x + D \sin 2x + E \cos 2x + Y_0(x)$$

CON $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ ED $Y_0(x)$ DELLA FORMA $Y_0(x) = a x e^x$, CON $a \in \mathbb{R}$

DA DETERMINARE.

TROVIAMO $a$. PER OGNI $k \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$Y_0^{(k)}(x) = a \cdot (x+k) e^x$$

QUINDI, SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE, SI OTTIENE:

$$a(x+5)e^x - a(x+4)e^x + 5a(x+3)e^x - 5a(x+2)e^x + 4a(x+1)e^x - 4axe^x = 10e^x$$

CIOÈ:

$$a(1+5+4)e^x = 10e^x$$

DA CUI SEGUE $a = 1$, CIOÈ $Y_0(x) = x e^x$.

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

(1) $$Y(x) = A e^x + B \sin x + C \cos x + D \sin 2x + E \cos 2x + x e^x$$

AL VARIARE DI $A, B, C, D, E$ IN $\mathbb{R}$.

**(b)** LA (1) È $o(x^2 e^x)$ PER $x \to -\infty$ SE E SOLO SE $B = C = D = E = 0$

IL "SE" È OVVIO. PER IL "SOLO SE" BASTA OSSERVARE CHE

SE $B$, $C$, $D$ ED $E$ NON SONO TUTTI NULLI ALLORA, PER $x \to -\infty$,

$$B \sin x + C \cos x + D \sin 2x + E \cos 2x \not\to 0$$

PERCHÉ È PERIODICA NON IDENTICAMENTE NULLA, QUINDI NON

PUÒ ESSERE $o(x^2 e^x)$, CHE INVECE È INFINITESIMO.