FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

ESERCIZI

(CON RISULTATI E ALCUNI SVOLGIMENTI)

INDICE PROVVISORIO:

20 Maggio 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

NEI CASI SEGUENTI TROVARE $\mathring{\Omega}$, $\partial\Omega$, $\bar{\Omega}$ E $D\Omega$. DIRE POI SE Ω È CHIUSO, APERTO, DISCRETO, DENSO, COMPATTO E/O LIMITATO.

1 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2\le 1\}$

2 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x|+|y|\le 1\}$

3 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x\cdot y|\le 1\}$

4 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0,\ x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}-\{0\}\}$

5 $\Omega=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

6 $\Omega=\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$

7 $\Omega=\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$

8 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy\neq 0\}$

9 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\in\mathbb{Q}\}$

10 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y+x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}-\{0\}\}$

11 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{m}{n},\ \text{CON } n,m\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\}$

12 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z\le 1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$

13 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1<x^2+y^2+z^2\le 2\}$

14 $\Omega=\mathbb{Q}\times\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$

15 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=\frac{1}{2^n},\ y=\frac{m}{2^n},\ z=\frac{k}{2^n},\ \text{CON } n,m,k\in\mathbb{N}\}$

---

16 TROVARE $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ TALE CHE, OPERANDO RIPETUTAMENTE SU DI ESSO CON GLI OPERATORI CHIUSURA, PARTE INTERNA E COMPLEMENTARE, SI POSSANO OTTENERE 14 INSIEMI DIVERSI (CONTANDO ANCHE Ω).

17 DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE UN INSIEME DISCRETO PUÒ AVERE PUNTI DI ACCUMULAZIONE.

18 DIRE SE NELLA DISUGUAGLIANZA $\|x\|_2\le\|x\|_1\le\sqrt{n}\cdot\|x\|_2$ (CON $x\in\mathbb{R}^n$) LE COSTANTI SONO OTTIMALI. OVVERO DIRE SE ESISTONO (OPPURE NO) $C_1>1$ E $C_2<\sqrt{n}$ TALI CHE $\forall x\in\mathbb{R}^n$ VALGA $C_1\cdot\|x\|_2\le\|x\|_1\le C_2\cdot\|x\|_2$.

19 TROVARE TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^2$ CHE SONO SIA CHIUSI CHE APERTI (MOTIVARE LA RISPOSTA).

20 SIANO $u,v,w\in\mathbb{R}^2$ I PUNTI $u=(0,1)$ $v=(1,0)$ E $w=(3,\sqrt{3})$. TROVARE $\mathring{\Omega}$, $\partial\Omega$ E $D\Omega$ DELL'INSIEME:

$$\Omega=\{\alpha u+\beta v+\gamma w \mid \alpha,\beta\in\mathbb{Z},\ \gamma\in\mathbb{Q}\}$$

20 Maggio 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SOLUZIONI

(PER I PIÙ SEMPLICI SI METTERANNO SOLO LE RISPOSTE, SENZA SVOLGERLI)

1 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \le 1\}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO NO — LIMITATO SI

$$\mathring{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$$

$$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

$$\overline{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$$

$$D\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$$

---

2 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < |x|+|y| \le 1\}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO NO — LIMITATO SI

$$\mathring{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < |x|+|y| < 1\}$$

$$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

$$\overline{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \le 1\}$$

$$D\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \le 1\}$$

---

3 $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < |x+y| \le 1\}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO NO — LIMITATO NO

$$\mathring{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < |x+y| < 1\}$$

$$\partial\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y = 0 \ \text{o} \ x+y = 1 \ \text{o} \ x+y = -1\}$$

$$\overline{\Omega} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1\}$$

$$D\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x+y| \le 1\}$$

---

4 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0,\ x=\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}-\{0\}\}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO SI — LIMITATO SI

$\mathring{\Omega} = \emptyset$

$\partial\Omega = \Omega \cup \{(0,0)\}$

$\overline{\Omega} = \Omega \cup \{(0,0)\}$

$D\Omega = \{(0,0)\}$

---

5 **6** $\Omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ OPPURE $\Omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$

(STESSE RISPOSTE)

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO SI — DISCRETO NO — LIMITATO NO

$\mathring{\Omega} = \emptyset$

$\partial\Omega = \mathbb{R}^2$

$\overline{\Omega} = \mathbb{R}^2$

$D\Omega = \mathbb{R}^2$

---

7 $\Omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$

CHIUSO NO — APERTO NO — COMPATTO NO

DENSO NO — DISCRETO NO — LIMITATO NO

$\mathring{\Omega} = \emptyset$

$\partial\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

$\overline{\Omega} = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

$D\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

---

8 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$

CHIUSO NO — APERTO SI — COMPATTO NO

DENSO SI — DISCRETO NO — LIMITATO NO

$\mathring{\Omega} = \Omega$

$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

$\overline{\Omega} = \mathbb{R}^2$

$D\Omega = \mathbb{R}^2$

---

9 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\in\mathbb{Q}\}$

CHIUSO NO | APERTO NO | COMPATTO NO

DENSO SI | DISCRETO NO | LIMITATO NO

$\mathring{\Omega}=\emptyset$

$\partial\Omega=\mathbb{R}^2$

$\overline{\Omega}=\mathbb{R}^2$

$D\Omega=\mathbb{R}^2$

Ω È L'UNIONE DI TUTTE LE RETTE DEL TIPO $x+y=q$, CON $q\in\mathbb{Q}$

---

10 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}-\{0\}\}$

CHIUSO NO | APERTO NO | COMPATTO NO

DENSO NO | DISCRETO NO | LIMITATO NO

$\mathring{\Omega}=\emptyset$

$\partial\Omega=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$

$\overline{\Omega}=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$

$D\Omega=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$

---

11 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\frac{1}{n},\ y=\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\}$

CHIUSO NO | APERTO NO | COMPATTO NO

DENSO NO | DISCRETO SI | LIMITATO NO

$\mathring{\Omega}=\emptyset$

$\partial\Omega=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

$\overline{\Omega}=\Omega\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

$D\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}$

OSS. 1 OGNI RETTANGOLO DEL TIPO $(a,b)\times(c,d)$ CON $0<a<b$ CONTIENE SOLO UN NUMERO FINITO DI PUNTI DI Ω. QUINDI I PUNTI DEL TIPO (x,y), CON $x>0$, O SONO PUNTI ISOLATI DI Ω, O SONO PUNTI ESTERNI. ANALOGAMENTE SI RAGIONA CON I PUNTI DI TIPO (x,y) CON $x<0$.

OSS. 2 TUTTI I PUNTI DEL TIPO $(0,y)$ SONO DI ACCUMULAZIONE PER Ω, INFATTI $\forall\rho>0$ MOSTRIAMO CHE C'È UN PUNTO DI Ω CHE DISTA DA $(0,y)$ MENO DI ρ. INFATTI, PRESO $n\in\mathbb{N}$ TALE CHE $\frac{1}{n}<\frac{\rho}{2}$ BASTA PRENDERE $m\in\mathbb{Z}$ TALE CHE $\frac{m}{n}<y<\frac{m+1}{n}$ COSICCHÉ $d(y,\frac{m}{n})<\frac{1}{n}$

QUINDI $\left(\frac{1}{n},\frac{m}{n}\right)\in\Omega$ E SI HA:

$$d\left((0,y),\left(\tfrac{1}{n},\tfrac{m}{n}\right)\right)\leq d\left((0,y),\left(0,\tfrac{m}{n}\right)\right)+d\left(\left(0,\tfrac{m}{n}\right),\left(\tfrac{1}{n},\tfrac{m}{n}\right)\right)\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}=\rho$$

---

12 $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z\leq 1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$

CHIUSO NO | APERTO NO | COMPATTO NO

DENSO NO | DISCRETO NO | LIMITATO SI

$\mathring{\Omega}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$

$\overline{\Omega}=D\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$

$\partial\Omega=\overline{\Omega}-\mathring{\Omega}$

---

13 $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2+z^2 \le 2\}$

CHIUSO **NO** — APERTO **NO** — COMPATTO **NO**

DENSO **NO** — DISCRETO **NO** — LIMITATO **SI**

$$\mathring{\Omega} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2+y^2+z^2 < 2\}$$

$$\partial\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \ \text{ OPPURE } \ x^2+y^2+z^2 = 2\}$$

$$\overline{\Omega} = D\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$$

---

14 $\Omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

CHIUSO **NO** — APERTO **NO** — COMPATTO **NO**

DENSO **NO** — DISCRETO **NO** — LIMITATO **NO**

$$\mathring{\Omega} = \emptyset$$

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} = D\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$$

---

15 $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{1}{2^n},\ y = \frac{m}{2^n},\ z = \frac{k}{2^n},\ \text{CON } n,m,k \in \mathbb{N}\right\}$

CHIUSO **NO** — APERTO **NO** — COMPATTO **NO**

DENSO **NO** — DISCRETO **SI** — LIMITATO **NO**

$$\mathring{\Omega} = \emptyset$$

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} = \Omega \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$$

$$D\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$$

RIASSUMENDO:

I PUNTI $(0,y,z)$ CON $y \ge 0$ E $z \ge 0$ SONO TUTTI DI ACCUMULAZIONE GRAZIE ALL' $\boxed{\text{OSS. 3}}$

TUTTI GLI ALTRI PUNTI, O SONO ESTERNI, O SONO PUNTI ISOLATI DI Ω (E QUINDI DI $\partial\Omega$) GRAZIE A $\boxed{\text{OSS. 1}}$ E $\boxed{\text{OSS. 2}}$

$\boxed{\text{OSS. 1}}$ $\Omega \subset$ PRIMO OTTANTE QUINDI TUTTI GLI (x,y,z) TALI CHE ALMENO UNA COORDINATA È STRETTAMENTE NEGATIVA SONO ESTERNI.

$\boxed{\text{OSS. 2}}$ TUTTI GLI INSIEMI DEL TIPO $(a,b)\times(c,d)\times(\alpha,\beta)$ CON $0<a<b$ CONTENGONO AL PIÙ UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI DI Ω. CIÒ DIMOSTRA CHE OGNI $(x,y,z) \in \Omega$ È ISOLATO. DIMOSTRA ANCHE CHE OGNI $(x,y,z) \notin \Omega$, CON $x>0$, È ESTERNO A Ω.

$\boxed{\text{OSS. 3}}$ INVECE I PUNTI DEL TIPO $(0,y,z)$, CON $y \ge 0$ E $z \ge 0$ SONO TUTTI DI ACCUMULAZIONE PER Ω. INFATTI $\forall \rho > 0$ PRENDIAMO $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ IN MODO CHE:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\rho}{3}$$

DOPODICHÉ PRENDIAMO $m, k \in \mathbb{N}$ IN MODO CHE

$$\frac{m}{2^n} \le y < \frac{m+1}{2^n} \quad \text{E} \quad \frac{k}{2^n} \le z < \frac{k+1}{2^n}$$

CON TALI SCELTE DI n,m,k SI HA:

$$d\left((0,y,z),\left(\frac{1}{2^n},\frac{m}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)\right) \le \sqrt{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\left(\frac{1}{2^n}\right)^2+\left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{3}\,\frac{1}{2^n} < \sqrt{3}\cdot\frac{\rho}{3} < \rho$$

QUINDI $\forall \rho > 0$ ESISTE UN PUNTO DI Ω CHE DISTA DA $(0,y,z)$ MENO DI ρ. CIÒ SIGNIFICA CHE $(0,y,z)$ È DI ACCUMULAZIONE.

16 TROVARE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ TALE CHE, OPERANDO RIPETUTAMENTE SU DI ESSO CON GLI OPERATORI CHIUSURA, PARTE INTERNA E COMPLEMENTARE, SI POSSANO OTTENERE 14 INSIEMI DIVERSI (CONTANDO ANCHE Ω).

SVOLGIMENTO

BASTA PRENDERE:

$$\Omega = \left([0,1)\times\mathbb{Q}\right) \cup \left(\left([1,2] \cup \{3\} \cup [4,5) \cup (5,6]\right)\times\mathbb{R}\right)$$

SI HA:

$$\mathring{\Omega} = \left((1,2) \cup (4,5) \cup (5,6)\right)\times\mathbb{R}$$

$$\overline{\mathring{\Omega}} = \left([1,2] \cup [4,6]\right)\times\mathbb{R}$$

$$\mathring{\overline{\mathring{\Omega}}} = \left((1,2) \cup (4,6)\right)\times\mathbb{R}$$

INOLTRE:

$$\overline{\Omega} = \left([0,2] \cup \{3\} \cup [4,6]\right)\times\mathbb{R}$$

$$\mathring{\overline{\Omega}} = \left((0,2) \cup (4,6)\right)\times\mathbb{R}$$

$$\overline{\mathring{\overline{\Omega}}} = \left([0,2] \cup [4,6]\right)\times\mathbb{R}$$

QUESTI 7 INSIEMI SONO TUTTI DISTINTI, COME PURE I LORO 7 COMPLEMENTARI.

IN TUTTO ABBIAMO OTTENUTO 14 INSIEMI, TUTTI DIVERSI.

---

17 DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE UN INSIEME DISCRETO PUÒ AVERE PUNTI DI ACCUMULAZIONE.

SVOLGIMENTO

LA RISPOSTA (MOLTO SEMPLICE) È SI: BASTA PRENDERE COME ESEMPIO L'INSIEME Ω DEL PROB. 4, O DEL PROB. 11, O DEL PROB. 15

---

18 DIRE SE NELLA DISUGUAGLIANZA $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\cdot\|x\|_2$ (CON $x\in\mathbb{R}^n$) LE COSTANTI SONO OTTIMALI.
OVVERO DIRE SE ESISTONO (OPPURE NO) $C_1>1$ E $C_2<\sqrt{n}$ TALI CHE $\forall x\in\mathbb{R}^n$ VALGA $C_1\cdot\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2\cdot\|x\|_2$.

SVOLGIMENTO

LE COSTANTI 1 E $\sqrt{n}$ SONO OTTIMALI, CIOÈ NON ESISTONO $C_1>1$ E $C_2<\sqrt{n}$ CHE RENDANO VERA LA DISUGUAGLIANZA PER OGNI $x\in\mathbb{R}^n$.

INFATTI SE PRENDO $x=(1,0,0,\dots,0)=e_1$ SI HA $\|x\|_2=\|x\|_1=1$, QUINDI SE $C_1>1$ NON VALE $C_1\cdot\|x\|_2\leq\|x\|_1$. QUINDI $C_1=1$ È LA COSTANTE OTTIMALE.

INOLTRE SE PRENDO $x=(1,1,\dots,1)$ SI HA $\|x\|_2=\sqrt{n}$ E $\|x\|_1=n$ E QUINDI $\|x\|_1=\sqrt{n}\cdot\|x\|_2$. DI CONSEGUENZA, SE $C_2<\sqrt{n}$, NON PUÒ VALERE $\|x\|_1\leq C_2\|x\|_2$.

QUINDI $C_2=\sqrt{n}$ È LA COSTANTE OTTIMALE.

---

19 TROVARE TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^2$ CHE SONO SIA CHIUSI CHE APERTI (MOTIVARE LA RISPOSTA).

SVOLGIMENTO

È IMMEDIATO VERIFICARE CHE $\mathbb{R}^2$ È SIA APERTO (PERCHÉ OGNI SUO PUNTO È INTERNO) CHE CHIUSO (VISTO CHE, ESSENDO $\partial\mathbb{R}^2=\emptyset$, SI HA $\partial\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^2$).

QUINDI ANCHE IL SUO COMPLEMENTARE, CIOÈ $\emptyset$, È SIA CHIUSO CHE APERTO.

OLTRE A QUESTI 2 NON CE NE SONO ALTRI.

INFATTI SE PER ASSURDO CI FOSSE UN ALTRO Ω_1 SIA CHIUSO CHE APERTO ALLORA ANCHE $\Omega_2=\Omega^c$ SAREBBE APERTO E DUNQUE $\mathbb{R}^2$ SAREBBE NON CONNESSO, VISTO CHE Ω_1 E Ω_2 SAREBBERO 2 APERTI NON VUOTI E DISGIUNTI TALI CHE $\Omega_1\cup\Omega_2=\mathbb{R}^2$. MA $\mathbb{R}^2$ NON PUÒ ESSERE NON CONNESSO, VISTO CHE È CONVESSO E QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, CONNESSO PER SPEZZATE.

---

20 SIANO $u,v,w\in\mathbb{R}^2$ I PUNTI $u=(0,1)$ $v=(1,0)$ E $w=(3,\sqrt{3})$. TROVARE $\mathring{\Omega}$, $\partial\Omega$ E $D\Omega$ DELL'INSIEME:

$$\Omega=\{\alpha u+\beta v+\gamma w \mid \alpha,\beta\in\mathbb{Z},\ \gamma\in\mathbb{Q}\}$$

SVOLGIMENTO

MOSTREREMO CHE Ω E Ω^c SONO ENTRAMBI DENSI IN $\mathbb{R}^2$, COSICCHÉ $\mathring{\Omega}=\emptyset$, $\partial\Omega=D\Omega=\mathbb{R}^2$.

LA DENSITÀ DI Ω^c È IMMEDIATA CONSEGUENZA DEL FATTO CHE Ω È NUMERABILE; QUALSIASI INTORNO IO PRENDA HA CARDINALITÀ DEL CONTINUO, QUINDI NON PUÒ ESSERE CONTENUTO IN Ω, CHE È NUMERABILE, QUINDI DEVE SEMPRE INTERSECARE Ω^c.

LA DENSITÀ DI Ω È PIÙ COMPLICATA E PASSA ATTRAVERSO DIVERSE OSSERVAZIONI.

$\boxed{\text{OSS.1}}$ $(x,y\in\Omega$ E $n,m\in\mathbb{Z})\Rightarrow nx+my\in\Omega$.

INFATTI $x_1,x_2\in\Omega\Rightarrow x_1=\alpha_1 u+\beta_1 v+\gamma_1 w$ E $x_2=\alpha_2 u+\beta_2 v+\gamma_2 w$ CON $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{Z}$ E $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{Q}$. MA ALLORA:

$$n x_1 + m x_2 = n(\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w) + m(\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w) =$$

$$= (n\alpha_1 + m\alpha_2)u + (n\beta_1 + m\beta_2)v + (n\gamma_1 + m\gamma_2)w$$

DOVE $n\alpha_1 + m\alpha_2 \in \mathbb{Z}$, $n\beta_1 + m\beta_2 \in \mathbb{Z}$ E $n\gamma_1 + m\gamma_2 \in \mathbb{Q}$.

QUINDI $n x_1 + m x_2 \in \Omega$.

$\boxed{\text{OSS.2}}$ $\bar{x} = (0, \sqrt{3}) \in \Omega$

INFATTI $\bar{x} = (0, \sqrt{3}) = (3, \sqrt{3}) - 3\cdot(1,0) = w - 3v \in \Omega$

$\boxed{\text{OSS.3}}$ I PUNTI DEL TIPO $n\bar{x} + m u$, CON $n, m \in \mathbb{Z}$ SONO TUTTI DISTINTI

MOSTRIAMO CIOÈ CHE, SE $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}$, SI HA:

(1) $$\left(n_1\bar{x} + m_1 u = n_2\bar{x} + m_2 u\right) \Rightarrow \left(n_1 = n_2 \text{ E } m_1 = m_2\right)$$

INFATTI:

(2) $$\left(n_1\bar{x} + m_1 u = n_2\bar{x} + m_2 u\right) \Leftrightarrow \left((n_1 - n_2)\bar{x} = (m_2 - m_1)u\right)$$

MA RICORDANDO CHE $u = (0,1)$ E $\bar{x} = (0, \sqrt{3})$ LA **(2)** DIVENTA.

(3) $$\left(n_1\bar{x} + m_1 u = n_2\bar{x} + m_2 u\right) \Leftrightarrow \left((0, (n_1 - n_2)\sqrt{3}) = (0, m_2 - m_1)\right) \Leftrightarrow \left((n_1 - n_2)\sqrt{3} = m_2 - m_1\right)$$

MA, SICCOME $\sqrt{3}$ È IRRAZIONALE, L'UNICO MODO PERCHÈ VALGA $(n_1 - n_2)\sqrt{3} = m_2 - m_1$ È CHE SIA $n_1 - n_2 = 0$ E $m_2 - m_1 = 0$, CIOÈ CHE SIA

$$n_1 = n_2 \quad \text{E} \quad m_1 = m_2$$

QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO **(1)**.

$\boxed{\text{OSS.4}}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists^{\text{no}}$ $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ TALI CHE $d(n\bar{x} + m u, (0,0)) < \varepsilon$. CIOÈ $(0,0)$ È PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER L'INSIEME DI TUTTE LE COMBINAZIONI A COEFFICIENTI INTERI DI $\bar{x}$ E u.

PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ PRENDIAMO $m_n = -\lfloor n\sqrt{3} \rfloor$, COSICCHÈ:

(4) $$x_n = n\bar{x} + m_n u = \left(0, n\sqrt{3} - \lfloor n\sqrt{3} \rfloor\right)$$

SI NOTI CHE $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA $0 < n\sqrt{3} - \lfloor n\sqrt{3} \rfloor < 1$. INOLTRE, GRAZIE ALL' $\boxed{\text{OSS.3}}$, AL VARIARE DI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ TALI VALORI SONO TUTTI DISTINTI, QUINDI, GRAZIE AL TEOREMA DI BOLZANO WEIERSTRASS, HANNO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE. DI CONSEGUENZA, $\forall \varepsilon > 0$, ESISTERANNO $n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$ TALI CHE $\left|\left(n_1\sqrt{3} - \lfloor n_1\sqrt{3} \rfloor\right) - \left(n_2\sqrt{3} - \lfloor n_2\sqrt{3} \rfloor\right)\right| < \varepsilon$.

QUINDI PRESO $n = n_1 - n_2$ E $m = -\lfloor n_1\sqrt{3}\rfloor + \lfloor n_2\sqrt{3}\rfloor$ SI HA:

$$d\left(n\bar{x} + m u, (0,0)\right) = \left|(n_1 - n_2)\sqrt{3} - \lfloor n_1\sqrt{3}\rfloor + \lfloor n_2\sqrt{3}\rfloor\right| < \varepsilon$$

QUESTO DIMOSTRA L'$\boxed{\text{OSS. 4}}$.

$\boxed{\text{OSS. 5}}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists^{\text{ne}}$ $n, m \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $d\left(n\bar{x} + m u, (0,y)\right) < \varepsilon$

PRENDIAMO $n_1, m_1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ TALI CHE, DETTO $x_1 = n_1\bar{x} + m_1 u$, SI ABBIA $d(x_1, (0,0)) < \varepsilon$ (POSSIAMO FARLO GRAZIE ALL'$\boxed{\text{OSS. 4}}$). ORA, SICCOME $0 < n_1\sqrt{3} + m_1 < \varepsilon$, SE PRENDO $n \in \mathbb{Z}$ TALE CHE

$$n(n_1\sqrt{3} + m_1) \leq y \leq (n+1)(n_1\sqrt{3} + m_1)$$

AVRÒ CHE:

$$|n(n_1\sqrt{3} + m_1) - y| < \varepsilon$$

E QUINDI, POSTO $\tilde{x} = n n_1 \bar{x} + n m_1 u$, SI HA:

$$d(\tilde{x}, (0,y)) = |n(n_1\sqrt{3} + m_1) - y| < \varepsilon$$

QUESTO DIMOSTRA L'$\boxed{\text{OSS. 5}}$.

$\boxed{\text{OSS. 6}}$ (CONCLUSIONE)

SICCOME $\{u, w\}$ È UNA BASE PER $\mathbb{R}^2$, OGNI $x \in \mathbb{R}^2$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME

$$x = \alpha u + \beta w \qquad \text{CON } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\forall \varepsilon > 0$ POSSO ORA PRENDERE $\gamma \in \mathbb{Q}$ IN MODO CHE $d(\gamma w, \beta w) < \frac{\varepsilon}{2}$

INOLTRE, GRAZIE ALL'$\boxed{\text{OSS. 5}}$ POSSO PRENDERE $n, m \in \mathbb{Z}$ IN MODO CHE $d\left(n\bar{x} + m u, \alpha u\right) < \frac{\varepsilon}{2}$

DI CONSEGUENZA $n\bar{x} + m u + \gamma w \in \Omega$ E SI HA

$$d\left(n\bar{x} + m u + \gamma w, \alpha u + \beta w\right) = \|n\bar{x} + m u + \gamma w - (\alpha u + \beta w)\|$$

$$\leq \|n\bar{x} + m u - \alpha u\| + \|\gamma w - \beta w\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

CIÒ DIMOSTRA CHE Ω È DENSO.

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

Calcolare i seguenti limiti o dimostrare che non esistono:

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$

3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8y}{x^6+y^6}$

5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}$

6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^6+y^6}$

7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{100}y^{100}}{x^2+y^2}$

8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{100}y^{100}}{x+y}$

9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^2}{x^6+y^8}$

10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^5}{x^6+y^8}$

11) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4+x^5+y^5}{x^4+y^4+x^6y^3}$

12) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{x^6+y^6}$

13) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^7}{x^8+y^8}$

14) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$

15) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^8+y^8+x^9-y^9}$

16) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^8+y^8+x^4-y^4}$

17) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2+xy}$

18) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2+2xy}$

19) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y^8}{(x^8+y^{20})(x^{20}+y^8)}$

20) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2+x^4}{x^2+8y^2+x^6-y^6}$

21) Studiare, al variare di $\alpha\geq 0$ il $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30}+y^{18})(x^{10}+y^{10})}$

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

Risposte:

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} = 0$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2} = 0$

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8y}{x^6+y^6} = 0$

5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2} = 0$

6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^6+y^6} = +\infty$

7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{100}y^{100}}{x^2+y^2} = 0$

8) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{100}y^{100}}{x+y}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

9) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y^2}{x^6+y^8} = 0$

10) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^5}{x^6+y^8}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

11) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4+x^5+y^5}{x^4+y^4+x^6y^3} = 0$

12) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{x^6+y^6} = 0$

13) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^7}{x^8+y^8} = 0$

14) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

15) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^8+y^8+x^9-y^9} = +\infty$

16) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^8+y^8+x^4-y^4}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

17) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2+xy} = 0$

18) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2+2xy}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

19) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y^8}{(x^8+y^{20})(x^{20}+y^8)} = 0$

20) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3y^2+x^y}{x^2+8y^2+x^6-y^6}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

21) Studiare, al variare di $\alpha \geq 0$ il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30}+y^{18})(x^{10}+y^{10})}$

il limite vale 0 per $\alpha > 35$, mentre per $0 \leq \alpha \leq 35$ NON ESISTE

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

(II^a PARTE)

Calcolare i seguenti limiti o dimostrare che non esistono:

1) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{x^2+y^2}$

2) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3) $\lim_{(x,y)\to\infty} \sqrt{x^2+y^2}$

4) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2}$

5) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{xy}{x^2+y^2}$

6) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{|x|+|y|}$

7) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{|x+y|}$

8) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4+xy}$

9) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2+y^2}{|x^5|+|y^5|}$

10) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2+y^2}{|x^5+y^5|}$

11) $\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^2+xy)$

12) $\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^2+2xy)$

13) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^6+y^6}{x^2+y^4}$

14) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2-xy+y^4}{x^2+y^4}$

15) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2-xy^2+y^4}{x^2+y^4}$

16) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{xy}{1+x^2y^2}$

Calcolare i seguenti limiti o dimostrare che non esistono:

17) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$

18) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy+x^2y^2}$

19) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

20) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\cos(x^2+y^4))}{x^2+y^4}$

21) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\cos(xy))}{x^2+y^4}$

22) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\cos(x^2+y^2))}{xy}$

23) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2|xy|+|y|}{x^2+|y|}$

24) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x|+|y|}-\sqrt{|xy|}}{x^2+|y|-\sin xy}$

25) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot\sqrt[3]{x}+y\cdot\sqrt[3]{y}}{x^2+|y|+y(x+y)}$

26) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^6}{\ln(\cos(x^2+y^6))}$

27) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^6+y^6}\cdot\ln\left(\frac{x^6+y^6+x^6y^7}{x^6+y^6}\right)$

28) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy^2)}{x^2-xy^3+y^4}$

29) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy^2)}{x^2-xy^2+y^4}$

30) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2-xy^2+y^4}$

31) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy^2)}{x^2-2xy^2+y^4}$

32) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^6}-1+x^3}{x^2+y^6}$

33) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2-y^6}-1}{x^2-y^6}$

34) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2-y^6}-1+x^3}{x^2-y^6}$

35) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2)+\ln(1+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)}$

36) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^3)+\ln(1+y^3)}{\ln(1+x^3+y^3)}$

37) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}$

38) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^5+y^5)}{\ln(1+x^3+y^3)}$

39) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^5)+\ln(1+y^5)}{\ln(1+x^3+y^3)}$

40) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8+y^8}{x^2y^2+x^{16}+y^{16}}$

41) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$

42) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^{|xy|}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

43) Data $f(x,y)=x^y$, calcolarne il limite per $(x,y)\to(0,0)$ (o dimostrare che non esiste), prima considerandola nel suo dominio naturale $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$, poi restringendola all'insieme $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>|y|\}$.

LIMITI DI FUNZIONI IN DUE VARIABILI

(II° PARTE)

Risposte:

1) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$

2) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

3) $\lim_{(x,y)\to\infty} \sqrt{x^2+y^2} = +\infty$

4) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$

5) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{xy}{x^2+y^2}$ NON ESISTE

6) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{|x|+|y|} = 0$

7) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{|x+y|}$ NON ESISTE

8) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4+xy} = 0$

9) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2+y^2}{|x^5|+|y^5|} = 0$

10) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2+y^2}{|x^5+y^5|}$ NON ESISTE

11) $\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^2+xy) = +\infty$

12) $\lim_{(x,y)\to\infty} (x^2+y^2+2xy)$ NON ESISTE

13) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^6+y^6}{x^2+y^4} = +\infty$

14) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2-xy+y^4}{x^2+y^4} = 1$

15) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2-xy^2+y^4}{x^2+y^4}$ NON ESISTE

16) $\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{xy}{1+x^2y^2}$ NON ESISTE

Risposte

17) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = 1$

18) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy+x^2y^2} = 1$

19) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ NON ESISTE

20) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\cos(x^2+y^4))}{x^2+y^4} = 0$

21) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\cos(xy))}{x^2+y^4} = 0$

22) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(\cos(x^2+y^2))}{xy}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

23) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2|xy|+|y|}{x^2+|y|} = 1$

24) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x|+|y|}-\sqrt{|xy|}}{x^2+|y|-\sin xy} = +\infty$

25) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot\sqrt[3]{x}+y\cdot\sqrt[3]{y}}{x^2+|y|+y(x+y)}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

26) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^6}{\ln(\cos(x^2+y^6))} = 0$

27) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^6+y^6}\cdot\ln\left(\frac{x^6+y^6+x^6y^7}{x^6+y^6}\right) = 0$

28) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy^2)}{x^2-xy^3+y^4} = 0$

29) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy^2)}{x^2-xy^2+y^4} = 0$

30) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2-xy^2+y^4}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

31) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy^2)}{x^2-2xy^2+y^4}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

32) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^6}-1+x^3}{x^2+y^6} = 1$

33) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2-y^6}-1}{x^2-y^6} = 1$

34) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2-y^6}-1+x^3}{x^2-y^6}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

35) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2)+\ln(1+y^2)}{\ln(1+x^2+y^2)} = 1$

36) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^3)+\ln(1+y^3)}{\ln(1+x^3+y^3)}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

37) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} = 0$

38) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^5+y^5)}{\ln(1+x^3+y^3)} = 0$

39) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^5)+\ln(1+y^5)}{\ln(1+x^3+y^3)}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

40) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8+y^8}{x^2y^2+x^{16}+y^{16}}$ $\boxed{\text{NON ESISTE}}$

41) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = -\infty$

42) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^{|xy|}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

43) Data $f(x,y)=x^y$, calcolarne il limite per $(x,y)\to(0,0)$ (o dimostrare che non esiste), prima considerandola nel suo dominio naturale $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}$, poi restringendola all'insieme $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>|y|\}$.

[Risposta: su K il limite vale 1, su Ω invece non esiste]

ESERCIZI SULLA DIFFERENZIABILITÀ IN $\mathbb{R}^n$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione che in $(0,0)$ vale 0 e per $(x,y)\neq(0,0)$ è definita da:

1) $\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}$

2) $\dfrac{x^3y^7}{x^8+y^8}$

3) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$

4) $\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$

5) $\dfrac{x^9-y^9}{x^8+y^8}$

6) $\dfrac{x^5+xy^4+y^5}{x^4+2y^4}$

7) $\dfrac{x^8+x^3y^7}{x^6+y^6}+x+y$

8) $\dfrac{-3x^2y^2+2x^2y}{x^2+2y^2-4x^6y^6}$

9) $\dfrac{xy^3}{x^4+y^2}$

10) $\dfrac{x^7y^5}{x^{14}+y^8}$

11) $\dfrac{x^2y^8}{x^4+y^{14}}$

12) $\dfrac{xy^3-x^3y}{x^2+y^4}$

13) $\dfrac{x^5y^{12}}{x^8+y^{24}}$

14) $\dfrac{x^{32}y^5}{x^{48}+y^{12}}$

15) $\dfrac{x^{33}y^4}{x^{48}+y^{12}}$

16) $\dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2-xy}$

17) $\dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)}$

18) $\dfrac{x^4y^2}{(x^2+|y|)(|x|^5+|y|^3)}$

Dire a quali punti della frontiera del loro dominio è possibile estendere in modo differenziabile e/o continuo le seguenti funzioni:

19) $\dfrac{x^3y^2}{x^6+x^4y+|y|^3}$

20) $\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}$

ESERCIZI SULLA DIFFERENZIABILITÀ IN $\mathbb{R}^n$

Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione che in $(0,0)$ vale 0 e per $(x,y)\neq(0,0)$ è definita da:

1) $\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

2) $\dfrac{x^3y^7}{x^8+y^8}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE SI

3) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$

CONTINUA NO
DERIVABILE NO
DIFFERENZIABILE NO

4) $\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

5) $\dfrac{x^9-y^9}{x^8+y^8}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

6) $\dfrac{x^5+xy^4+y^5}{x^4+2y^4}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

7) $\dfrac{x^8+x^3y^7}{x^6+y^6}+x+y$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE SI

8) $\dfrac{-3x^2y^2+2x^2y}{x^2+2y^2-4x^6y^6}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

9) $\dfrac{xy^3}{x^4+y^2}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE SI

10) $\dfrac{x^7y^5}{x^{14}+y^8}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE SI

11) $\dfrac{x^2y^8}{x^4+y^{14}}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

12) $\dfrac{xy^3-x^3y}{x^2+y^4}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

13) $\dfrac{x^5y^{12}}{x^8+y^{24}}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE SI

14) $\dfrac{x^{32}y^5}{x^{48}+y^{12}}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE SI

15) $\dfrac{x^{33}y^4}{x^{48}+y^{12}}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

16) $\dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2-xy}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE SI

17) $\dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE SI

18) $\dfrac{x^4y^2}{(x^2+|y|)(|x|^5+|y|^3)}$

CONTINUA SI
DERIVABILE SI
DIFFERENZIABILE NO

Dire a quali punti della frontiera del loro dominio è possibile estendere in modo differenziabile e/o continuo le seguenti funzioni:

19) $\dfrac{x^3y^2}{x^6+x^4y+|y|^3}$

IL DOMINIO È $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$
PONENDO $f(0,0)=0$ SI OTTIENE UNA FUNZIONE CHE IN $(0,0)$ È CONTINUA E DERIVABILE, MA NON DIFFERENZIABILE

20) $\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}$

DOMINIO $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}$.
SE PER OGNI $t\in\mathbb{R}$ PONIAMO $f(t,t)=\cos t$, OTTENIAMO UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE SU TUTTO $\mathbb{R}^2$

Analisi Matematica (II modulo)- Exe. 12

Titolo nota 15/08/2014

8 e 10 Giugno 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

NEI CASI SEGUENTI CASI STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI PROPOSTE:

$\boxed{1}$ $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y^n)}{x^2+y^2+\sin((xy)^n)} & \text{PER } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{PER } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ AL VARIARE DI $n\in\mathbb{N}-\{0\}$

$\boxed{2}$ $$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\dfrac{1}{x+y} & \text{SE } x+y\neq 0\\ 0 & \text{SE } x+y=0\end{cases}$$

$\boxed{3}$ $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\ln(1+y)-y^2-xy}{y} & \text{SE } y>0\\ 0 & \text{SE } y\leq 0\end{cases}$$

$\boxed{4}$ $$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{y^2}}\sin\sqrt[4]{x^4+y^6} & \text{SE } y\neq 0\\ 0 & \text{SE } y=0\end{cases}$$

$\boxed{5}$ $$f(x,y)=\begin{cases}y^2\arctan(x+y) & \text{SE } y\leq 0\\ \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^\alpha} & \text{SE } y>0\end{cases}$$ AL VARIARE DI $\alpha>0$.

$\boxed{6}$ $f(x,y)=\chi_\Omega(x,y)$ DOVE $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2<y<2x^2\}$

$\boxed{7}$ $f(x,y)=y\cdot\chi_\Omega(x,y)$ DOVE Ω È LO STESSO DI $\boxed{6}$.

$\boxed{8}$ SIA $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO $\alpha > 0$ E CONTINUA.

COME DEVE ESSERE α, SE VOGLIAMO CHE SIA DIFFERENZIABILE NELL'ORIGINE?

$\boxed{9}$ DATA $f(x,y) = \dfrac{\arctan x - \arctan y}{x - y}$, DIRE SE È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ A TUTTO $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{10}$ ESIBIRE $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE SU TUTTO $\mathbb{R}^2$ MA NON $C^1(\mathbb{R}^2)$.

$\boxed{11}$ MOSTRARE CHE SE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ È UN APERTO CONVESSO ED $f:\Omega \to \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE CON ∇f LIMITATO, ALLORA f È LIPSCHITZIANA.

IL TEOREMA RIMANE VERO SE Ω È APERTO CONNESSO?

$\boxed{12}$ MOSTRARE CHE SE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ È APERTO CONNESSO ED $f:\Omega \to \mathbb{R}$ HA $\nabla f(x,y) = 0$ $\forall (x,y) \in \Omega$, ALLORA $f(x,y) =$ COSTANTE SU Ω.

$\boxed{13}$ SIA $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ TROVARE, SE ESISTE, $f:\Omega \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f_x(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$ E $f_y(x,y) = \dfrac{1}{x^3}$. SE NON ESISTE, DIMOSTRARLO.

$\boxed{14}$ COME $\boxed{13}$ MA CON $f_x(x,y) = \dfrac{x}{y}$ E $f_y(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

$\boxed{15}$ QUANTE DIVERSE FUNZIONI OTTENGO FACENDO TUTTE LE POSSIBILI DERIVATE QUARTE DELLA FUNZIONE $f(x,y,z,u,v,w) = (xyzuvw)^{100}$.

$\boxed{16}$ COME IL PROB $\boxed{15}$ MA CON $f(x,y,z,u,v,w) = (xyzuvw)^3$.

Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 6

Titolo nota

Prova simulata su: Limiti di Funz. su R^n. - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

1 CALCOLARE, SE ESISTE, ALTRIMENTI DIMOSTRARE CHE NON ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^5+x^4y}{x^4+y^{10}}$$

2 AL VARIARE DI $\alpha>0$, CALCOLARE, SE ESISTE, ALTRIMENTI DIMOSTRARE CHE NON ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2y^{10})}{x^6+y^{12}+x^5|y|^\alpha}$$

3 AL VARIARE DI $\alpha>0$, CALCOLARE, SE ESISTE, OPPURE DIMOSTRARE CHE NON ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\cdot|y|^\alpha}{(x^6+y^{12})(x^{20}+y^8)}$$

4 AL VARIARE DI $\alpha>0$, CALCOLARE, SE ESISTE, OPPURE DIMOSTRARE CHE NON ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy\cdot|z|^\alpha}{x^2+y^4+z^8+xy^2z^3}$$

5 SIA $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0\}$. DIRE SE ESISTE $f:\Omega\to\mathbb{R}$, CONTINUA SU Ω,

CHE SODDISFI ENTRAMBE LE CONDIZIONI:

1) $\forall\,\alpha>0 \quad \lim_{x\to0^+} f(x,x^\alpha)=0$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NON ESISTE

SE ESISTE, ESIBIRNE UNA; SE NON ESISTE, DIMOSTRARLO.

Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 6

Titolo nota

Prova simulata su: Limiti di Funz. su R^n. - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

SOLUZIONI

1 CALCOLARE, SE ESISTE, ALTRIMENTI DIMOSTRARE CHE NON ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^5+x^4y}{x^4+y^{10}}$$

SVOLGIMENTO

SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^5+x^4y}{x^4+y^{10}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{x^2\cdot y^5}{x^4+y^{10}}}\cdot\underbrace{\boxed{x}}_{\to 0} + \boxed{\frac{x^4}{x^4+y^{10}}}\cdot\underbrace{\boxed{y}}_{\to 0} = 0$$

LIMITATO PERCHÉ $\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right| \leq \frac{1}{2}$ CON $a=x^2$ E $b=y^5$

LIMITATO PERCHÉ $0 \leq x^4 \leq x^4+y^{10}$ E QUINDI $0 \leq \frac{x^4}{x^4+y^{10}} \leq 1$

---

2 AL VARIARE DI $\alpha>0$, CALCOLARE, SE ESISTE, ALTRIMENTI DIMOSTRARE CHE NON ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2y^{10})}{x^6+y^{12}+x^5|y|^\alpha}$$

SVOLGIMENTO

PER $(x,y)\to(0,0)$ SI HA $x^2y^{10}\to 0$ E QUINDI $\ln(1+x^2y^{10}) = x^2y^{10}+o(x^2y^{10})$

QUINDI IL LIMITE DA CALCOLARE DIVENTA:

(1)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^{10}}{x^6+y^{12}+x^5|y|^\alpha}$$

ORA, PER $\alpha>2$ SI HA

$$x^5\cdot|y|^\alpha = o(x^6+y^{12})$$

PERCHÉ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 |y|^\alpha}{x^6+y^{12}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{x^5\cdot y^2}{x^6+(y^2)^6}}}_{\text{LIMITATO}} \cdot \underbrace{\boxed{|y|^{\alpha-2}}}_{\to 0} = 0$$

PERCHÉ $\alpha > 2$

PERCHÉ, POSTO $x = u$ E $y^2 = v$

$\frac{x^5 y^2}{x^6+(y^2)^6}$ DIVENTA $\frac{u^5 v}{u^6+v^6}$ CHE È OMOGENEO

DI GRADO ZERO, QUINDI COSTANTE SULLE SEMIRETTE

CHE PARTONO DA $(0,0)$. QUINDI DAL FATTO CHE È LIMITATO

SU $u^2+v^2=1$ SEGUE CHE È LIMITATO SU TUTTO $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

DOPO AVER POSTO $x = u$ E $y^2 = v$ SI RAGIONA COME IN ■

QUINDI PER $\boxed{\alpha > 2}$ IL LIMITE **(1)** DIVENTA:

(2)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\cdot y^{10}}{x^6+y^{12}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{x\cdot (y^2)^5}{x^6+(y^2)^6}}}_{\text{LIMITATO}} \cdot \underbrace{\boxed{x}}_{\to 0} = 0$$

PER $\boxed{\alpha = 2}$, INVECE, NON È PIÙ VERO CHE x^5y^2 SIA $o(x^6+y^{12})$, TUTTAVIA $\exists\, C < 1$ TALE CHE

(3)
$$|x^5y^2| \leq C\,(x^6+y^{12}).$$

PER DIMOSTRARLO SI OSSERVI CHE:

$$\frac{|x^5y^2|}{x^6+y^{12}} = \frac{(|x|^3)^{\frac{5}{3}}\cdot(|y|^6)^{\frac{1}{3}}}{(|x|^3)^2+(|y|^6)^2}$$

QUINDI SE SI PONE $u = |x|^3$ E $v = |y|^6$ SI OTTIENE

$$\sup\left\{ \frac{|x^5y^2|}{x^6+y^{12}} \;\middle|\; (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right\} = \sup\left\{ \frac{u^{\frac{5}{3}}\cdot v^{\frac{1}{3}}}{u^2+v^2} \;\middle|\; (u,v)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\},\ u\geq 0,\ v\geq 0\right\} =$$

PERCHÉ $\frac{u^{\frac{5}{3}}\cdot v^{\frac{1}{3}}}{u^2+v^2}$ È OMOGENEA DI GRADO ZERO E QUINDI È COSTANTE SU TUTTE LE SEMIRETTE CHE NASCONO IN $(0,0)$.

$$= \boxed{\sup}\left\{ \boxed{\frac{u^{\frac{5}{3}}\cdot v^{\frac{1}{3}}}{u^2+v^2}} \;\middle|\; \boxed{u^2+v^2=1},\ u\geq 0,\ v\geq 0\right\} =$$

GRAZIE A ■

PER IL TEO. DI WEIERSTRASS, PERCHÉ L'INSIEME $K = \{(u,v) \mid u^2+v^2=1,\ u\geq 0, v\geq 0\}$ È COMPATTO

$$= \boxed{\max}\left\{ \boxed{u^{\frac{5}{3}}\cdot v^{\frac{1}{3}}} \;\middle|\; u^2+v^2=1,\ u\geq 0,\ v\geq 0\right\} < 1$$

PERCHÉ È UN MAX E u E v NON SONO MAI 1 CONTEMPORANEAMENTE

QUESTO DIMOSTRA CHE IN **(3)** LA COSTANTE C SODDISFA $0 < C < 1$. DI CONSEGUENZA

$$0 \leq (1-C)(x^6+y^{12}) \leq x^6+y^{12}+x^5y^2 \leq (1+C)(x^6+y^{12})$$

E QUINDI:

$$\frac{x^2 y^{10}}{(1+c)(x^6+y^{12})} \leq \frac{x^2 y^{10}}{x^6+y^{12}+x^5 y^2} \leq \frac{x^2 y^{10}}{(1-c)(x^6+y^{12})}$$

QUINDI, GRAZIE A **(2)** E AL TEO. DEL CONFRONTO SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^{10}}{x^6+y^{12}+x^5 y^2} = 0$$

VENIAMO ORA AL CASO $\boxed{0<\alpha<2}$

PER COMODITÀ DI ESPOSIZIONE SIA $N(x,y)=x^2y^{10}$ E $D(x,y)=x^6+y^{12}+x^5|y|^\alpha$, PER CUI LA FUNZIONE DI CUI CERCHIAMO IL LIMITE È:

$$f(x,y)=\frac{x^2y^{10}}{x^6+y^{12}+x^5|y|^\alpha}=\frac{N(x,y)}{D(x,y)}$$

È IMMEDIATO VERIFICARE CHE $f(0,y)$ E $f(x,0)$ SONO IDENTICAMENTE NULLE QUINDI, SE IL LIMITE C'È, È NECESSARIAMENTE 0.

BASTERÀ QUINDI MOSTRARE CHE CI SONO PUNTI ARBITRARIAMENTE VICINI A $(0,0)$ IN CUI $|f(x,y)|\geq 1$, PER POTER CONCLUDERE CHE IL LIMITE NON ESISTE.

OTTERREMO CIÒ COME RISULTATO DI UNA SEQUENZA DI OSSERVAZIONI.

IN TUTTA LA DISCUSSIONE CHE SEGUE $\forall \rho>0$ L'INSIEME Ω_ρ È DEFINITO DA

$$\Omega_\rho=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0,\ y>0,\ x^2+y^2<\rho^2\}$$

MENTRE Ω_ρ^+, Ω_ρ^- E Z_ρ SONO I SOTTOINSIEMI DI Ω_ρ IN CUI $D(x,y)$ È, RISPETTIVAMENTE, POSITIVO, NEGATIVO O NULLO. SI NOTI CHE Ω_ρ È APERTO E CONVESSO (E QUINDI ANCHE CONNESSO) E CHE Ω_ρ^+ E Ω_ρ^- SONO APERTI PER IL T. PERMANENZA DEL SEGNO APPLICATO ALLA FUNZIONE $D(x,y)$, CHE È CONTINUA.

DETTO CIÒ, VALGONO LE SEGUENTI OSSERVAZIONI:

$\boxed{\text{OSS. 1}}$ $\boxed{\forall \rho>0 \quad \Omega_\rho^+ \text{ NON È VUOTO}}$

INFATTI, RESTRINGENDOSI AI PUNTI (x,y) TALI CHE $y=|x|^{\frac{1}{\alpha}}$, CON $x<0$, SI HA:

PERCHÉ $x<0$

$$D\left(x,|x|^{\frac{1}{\alpha}}\right)=x^6+\left(|x|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{12}+x^5\left(|x|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}=x^6+|x|^{\frac{12}{\alpha}}+x^5\cdot|x|=|x|^{\frac{12}{\alpha}}>0$$

INOLTRE, PER QUANTO PICCOLO SIA $\rho>0$, CI SONO SEMPRE DENTRO Ω_ρ PUNTI DEL TIPO $\left(x,|x|^{\frac{1}{\alpha}}\right)$.

OSS. 2 $\forall \rho > 0$ Ω_ρ^- NON È VUOTO

NEI PUNTI DEL TIPO $(-y^2, y)$, CON $y>0$, SI HA:

$$D(-y^2,y) = (-y^2)^6 + y^{12} + (-y^2)^5 \cdot |y|^\alpha = 2y^{12} - y^{10+\alpha} = -y^{10+\alpha}\left(1 - 2y^{2-\alpha}\right)$$

QUINDI, SICCOME $0<\alpha<2$, $D(-y^2,y)$ È DEFINITIVAMENTE NEGATIVO PER $y \to 0^+$.

QUESTO, UNITO AL FATTO CHE SE $y \to 0^+$ ALLORA $(-y^2,y) \to (0,0)$, GARANTISCE CHE, PER QUANTO PICCOLO SIA $\rho>0$, $\exists (x,y) \in \Omega_\rho$ T.C. $f(x,y) < 0$.

QUINDI Ω_ρ^- NON È MAI VUOTO.

OSS. 3 $\forall \rho > 0$ $\exists (\bar{x},\bar{y}) \in Z_\rho$ CHE È DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega_\rho^+ \cup \Omega_\rho^-$

INTANTO Z_ρ È NON VUOTO, PER IL TEO. DEGLI ZERI. SE POI TUTTI GLI $(\bar{x},\bar{y}) \in Z_\rho$ FOSSERO ESTERNI A $\Omega_\rho^+ \cup \Omega_\rho^-$ ALLORA Z_ρ SAREBBE APERTO. QUINDI Ω_ρ SAREBBE UNIONE DI 3 APERTI NON VUOTI E DISGIUNTI, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE È CONNESSO.

QUINDI C'È ALMENO UN $(\bar{x},\bar{y}) \in Z_\rho$ CHE È DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega^+_\rho \cup \Omega^-_\rho$

OSS. 4 $\forall \rho > 0$ $\exists (x,y) \in \Omega_\rho^+ \cup \Omega_\rho^-$ T.C. $|f(x,y)| \geq 1$

PRESO $(\bar{x},\bar{y}) \in Z_\rho$ E DI ACC. PER $\Omega_\rho^+ \cup \Omega_\rho^-$, PRENDO UNA SUCC. $\left((x_n,y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $\Omega_\rho^+ \cup \Omega_\rho^-$ TALE CHE $(x_n,y_n) \to (\bar{x},\bar{y})$. IN TALI PUNTI $f(x,y)$ È BEN DEFINITA PERCHÉ $D(x,y) \neq 0$ E SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} |f(x_n,y_n)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|N(x_n,y_n)|}{|D(x_n,y_n)|} = \frac{\bar{x}^2\bar{y}^{10}}{0^+} = +\infty$$

QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE $\exists n \in \mathbb{N}$ T.C. $|f(x_n,y_n)| \geq 1$.

CONCLUSIONE IL FATTO CHE $\forall \rho>0$, PER QUANTO PICCOLO, ESISTA $(x,y) \in \Omega_\rho$ TALE CHE $|f(x,y)| \geq 1$, DIMOSTRA CHE $f(x,y) \not\to 0$ PER $(x,y) \to (0,0)$.

---

3 AL VARIARE DI $\alpha>0$, CALCOLARE, SE ESISTE, OPPURE DIMOSTRARE CHE NON ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \cdot |y|^\alpha}{(x^6 + y^{12})(x^{20} + y^8)}$$

SVOLGIMENTO

MOSTRIAMO CHE SE $\alpha > 12$ IL LIMITE È 0, MENTRE SE $0 < \alpha \leq 12$, IL LIMITE NON ESISTE.

PER COMINCIARE OSSERVIAMO CHE LA $f(x,y)$ DI CUI FACCIAMO IL LIMITE È IDENTICAMENTE NULLA SUGLI ASSI QUINDI, SE IL LIMITE ESISTE, DEVE ESSERE ZERO.

MA PER $0<\alpha\leq 12$ NON PUÒ ESSERE ZERO PERCHÈ RESTRINGENDOSI ALL'INSIEME $\Gamma=\{(x,y)\mid x=y^2,\ y>0\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma}} f(x,y)=\lim_{y\to 0^+} f(y^2,y)=\lim_{y\to 0^+}\frac{y^8\cdot|y|^\alpha}{2y^{12}\cdot(y^{10}+y^8)}=\lim_{y\to0^+}\frac{|y|^{8+\alpha}}{2y^{20}+o(y^{20})}\neq 0$$

SE $\alpha\leq 12$

QUINDI IL LIMITE NON ESISTE.

SE INVECE $\alpha>12$ SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\boxed{\frac{x^4\cdot y^4}{x^6+y^{12}}}}_{\text{LIMITATA}}\cdot\overbrace{\boxed{\frac{y^8}{x^{20}+y^8}}}^{\text{LIMITATA}}\cdot\overbrace{\boxed{|y|^{\alpha-12}}}^{0}=0$$

PERCHÈ $\alpha>12$

PERCHÈ: $\dfrac{x^4y^4}{x^6+y^{12}}=\dfrac{(|x|^3)^{\frac43}\cdot(y^6)^{\frac23}}{(|x|^3)^2+(y^6)^2}$ QUINDI PONENDO $u=|x|^3$ E $v=y^6$ SI HA:

$$\sup\left\{\frac{x^4y^4}{x^6+y^{12}}\ \middle|\ (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right\}=\sup\left\{\frac{u^{\frac43}v^{\frac23}}{u^2+v^2}\ \middle|\ u\geq0,\ v\geq0,\ (u,v)\neq(0,0)\right\}\overset{\downarrow}{=}$$

PERCHÈ OMOGENEA DI GRADO ZERO

$$=\sup\left\{\frac{u^{\frac43}v^{\frac23}}{u^2+v^2}\ \middle|\ u^2+v^2=1,\ u\geq0,\ v\geq0\right\}=\max\left\{u^{\frac43}v^{\frac23}\ \middle|\ u^2+v^2=1,\ u\geq0,\ v\geq0\right\}<1$$

---

4 AL VARIARE DI $\alpha>0$, CALCOLARE, SE ESISTE, OPPURE DIMOSTRARE CHE NON ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy\cdot|z|^\alpha}{x^2+y^4+z^8+xy^2z^5}$$

SVOLGIMENTO

INNANZITUTTO $xy^2z^5=o(x^2+y^4+z^8)$ PERCHÈ:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy^2z^5}{x^2+y^4+z^8}=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\underbrace{\boxed{\frac{x\cdot(y^2)}{x^2+(y^2)^2+(z^4)^8}}}_{\text{LIMITATA}}\cdot\underbrace{\boxed{z^5}}_{0}=0$$

PERCHÈ $\left|\dfrac{x\cdot y^2}{x^2+y^4+z^8}\right|\leq\dfrac{|x|\cdot y^2}{x^2+y^4}=\dfrac{ab}{a^2+b^2}\leq\dfrac12$

$a=|x|$, $b=y^2$

QUINDI IL LIMITE PROPOSTO EQUIVALE A:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy\cdot|z|^\alpha}{x^2+y^4+z^8}\tag{4}$$

LA FUNZIONE $f(x,y,z)$ DI CUI SI CERCA IL LIMITE È IDENTICAMENTE NULLA SUGLI ASSI, QUINDI, SE IL LIMITE C'È, DEVE ESSERE ZERO.

OSSERVIAMO CHE:

$$|f(x,y,z)| = \frac{|x|\cdot|y|\cdot|z|^\alpha}{x^2+y^4+z^8} = \boxed{\frac{|x|\cdot(|y|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(|z|^4)^{\frac{1}{2}}}{(|x|)^2+(|y|^2)^2+(|z|^4)^2}}\cdot \boxed{|z|^{\alpha-2}}$$

LIMITATA

$\to 0$ SE $\alpha>2$

PERCHÉ POSTO $a=|x|$, $b=|y|^2$, $c=|z|^4$ È UGUALE A: $\frac{a\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot c^{\frac{1}{2}}}{a^2+b^2+c^2}$ CHE È POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO ZERO E QUINDI IL SUO SUP. SUL PRIMO OTTANTE MENO L'ORIGINE, È UGUALE A QUELLO SU $\{(a,b,c) \mid a^2+b^2+c^2=1,\ a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0\}$ CHE (PER WEIERSTRASS) È UN MAX, E QUINDI È FINITO.

QUINDI, SE $\alpha>2$, IL LIMITE **(4)** VALE ZERO.

SE INVECE $0<\alpha\leq 2$ IL LIMITE **(4)** NON ESISTE PERCHÈ DETTA $\Gamma=\{(x,y,z) \mid x=y^2=z^4,\ y>0, z>0\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\(x,y,z)\in\Gamma}} f(x,y,z) = \lim_{z\to0^+} f(z^4,z^2,z) = \lim_{z\to0^+}\frac{z^4\cdot z^2\cdot z^\alpha}{3\cdot z^8} = \lim_{z\to0^+}\frac{z^{6+\alpha}}{3\cdot z^8} \neq 0$$

SE $0<\alpha\leq 2$

MENTRE SAPPIAMO GIÀ CHE RESTRINGENDOSI AGLI ASSI IL LIMITE È 0.

---

5 SIA $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\}$. DIRE SE ESISTE $f:\Omega\to\mathbb{R}$, CONTINUA SU Ω, CHE SODDISFI ENTRAMBE LE CONDIZIONI:

(1) $\forall\alpha>0 \quad \lim_{x\to0^+} f(x,x^\alpha)=0$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NON ESISTE

SE ESISTE, ESIBIRNE UNA; SE NON ESISTE, DIMOSTRARLO.

SVOLGIMENTO

PER AVERE UNA $f(x,y)$ CHE SODDISFI TUTTE LE CONDIZIONI RICHIESTE BASTA PRENDERE:

(5) $$f(x,y)=\frac{x\cdot\varphi(y)}{x^2+(\varphi(y))^2} \qquad \text{CON } \varphi(y)=e^{-\frac{1}{y^2}}$$

LA CONTINUITÀ SU TUTTO Ω È OVVIA.

PER MOSTRARE CHE VALE LA CONDIZIONE (1) SI OSSERVI INNANZITUTTO CHE:

(6) $$\varphi(y)=o(y^\alpha) \quad \forall\alpha>0 \quad \text{PER } y\to0^+$$

INFATTI $\forall \alpha > 0$ SI HA:

PONGO $t = \frac{1}{y^2}$

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{\varphi(y)}{y^\alpha} = \lim_{y \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{y^2}}}{y^\alpha} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{y^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}{e^{\frac{1}{y^2}}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}}}{e^t} = 0$$

DI CONSEGUENZA:

PERCHÉ, GRAZIE A (6), $(\varphi(y))^2 = o\left(y^{\frac{2}{\alpha}}\right)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x, x^\alpha) = \lim_{y \to 0^+} \left(y^{\frac{1}{\alpha}}, y\right) = \lim_{y \to 0^+} \frac{y^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \varphi(y)}{y^{\frac{2}{\alpha}} + (\varphi(y))^2} =$$

GRAZIE A (6)

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{y^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \varphi(y)}{y^{\frac{2}{\alpha}}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\varphi(y)}{y^{\frac{1}{\alpha}}} = 0$$

QUINDI LA (1) VALE.

PER LA (2) SI OSSERVI CHE, VISTO CHE CI SONO GIÀ RESTRIZIONI LUNGO LE QUALI $f(x,y) \to 0$, BASTA ESIBIRNE UNA LUNGO LA QUALE $f(x,y) \not\to 0$.

A TALE SCOPO, PRESO $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega \mid x = \varphi(y)\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in \Gamma}} f(x,y) = \lim_{y \to 0^+} f(\varphi(y), y) = \lim_{y \to 0^+} \frac{\varphi(y) \cdot \varphi(y)}{(\varphi(y))^2 + (\varphi(y))^2} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

QUINDI $f(x,y)$ SODDISFA ANCHE (2).

QUESITI PRESI DA PROVE D'ESAME O SIMULATE

1

PER OGNI $(x,y)\neq(0,0)$ DEFINIAMO $f(x,y)=\dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{(x^4+y^8)(x^8+y^4)}$, CON $\alpha>0$ E $\beta>0$.

VALGONO 6 PUNTI

- a) MOSTRARE CHE SE $\alpha=2$ E $\beta=7$ ALLORA $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NON ESISTE
- b) MOSTRARE CHE SE $\alpha=7$ E $\beta=3$ ALLORA $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

FACOLTATIVA → c) IN GENERALE DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, QUANTO VALE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ AL VARIARE DI $\alpha>0$ E $\beta>0$.

2

DATO $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ DEFINIAMO:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+xy^2}{2x^2+3y^2} & \text{SE } (x,y)\in\Omega\\ 0 & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$

6 PUNTI → a) DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE IN $(0,0)$ f È DIFFERENZIABILE.

FACOLTATIVA → b) COME a, MA CON $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y< x\sqrt{x}\}$

3

PER OGNI $\alpha,\beta>0$ SI CONSIDERI IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y)\to\infty}\frac{x^6+|x|\cdot|y|^{\alpha}+|y|^{\beta}}{x^2+y^2}$$

5 PUNTI → a) CALCOLARLO NEL CASO PARTICOLARE $\alpha=1$ E $\beta=3$

FACOLTATIVO → b) PER QUALI VALORI DI α E β IL LIMITE ESISTE?

4

DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, PER QUALI $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ È DIFFERENZIABILE LA FUNZIONE:

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}\,\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{PER } x>0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

5

DATA:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^4}{x^8+y^6} & \text{PER } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

STUDIARNE IN $(0,0)$ LA CONTINUITÀ E LA DIFFERENZIABILITÀ.

6A

AL VARIARE DI $\alpha > 0$, PER OGNI $(x,y) \neq (0,0)$ DEFINIAMO $f(x,y) = \dfrac{x^{30} \cdot |y|^{\alpha}}{x^{40} + y^{24}}$.

a) PER QUALI α È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ IN $(0,0)$? b) PER QUALI α (LA SUA ESTENSIONE) È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$?

6B

AL VARIARE DI $\alpha > 0$, PER OGNI $(x,y) \neq (0,0)$ DEFINIAMO $f(x,y) = \dfrac{x^{15} \cdot |y|^{\alpha}}{x^{24} + y^{8}}$.

a) PER QUALI α È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ IN $(0,0)$? b) PER QUALI α (LA SUA ESTENSIONE) È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$?

7

CALCOLARE, O DIMOSTRARE CHE NON ESISTE, IL LIMITE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 \cdot y^6}{x^{\alpha} + y^{14}}$ NEI CASI:

a) $\alpha = 10$. b) $\alpha = 7$.

8

CALCOLARE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{100} \cdot y^{100}}{2xy + A \cdot (x^2+y^2)}$$

NEI CASI: $\boxed{a}$ $A=0$ $\boxed{b}$ $A=1$ $\boxed{c}$ $A>1$ $\boxed{d}$ $0<A<1$ FACOLTATIVO

9

Data $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{|x|^\alpha y^3}{(x^4+y^8)(1+x^4+y^8)} & \text{altrimenti,} \end{cases}$ dire per quali $\alpha > 0$ si ha che:

(a) f è continua in $(0,0)$,

(b) f è differenziabile in $(0,0)$,

(c) f è infinitesima per $(x,y) \to \infty$.

10

Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5y + x^3y^3}{x^6 + y^4 + x^4y^2}$.

11

PER OGNI $(x,y) \neq (0,0)$ SIA $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^\alpha}{x^4 + y^{20}}$, DOVE α È UN PARAMETRO POSITIVO.

a PER QUALI VALORI DI α È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ IN $(0,0)$?

b PER QUALI VALORI DI α È DIFFERENZIABILE?

12

PER OGNI $(x,y) \in \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ DEFINIAMO $F(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$.

DIRE SE $F(x,y)$ È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ A TUTTO $\mathbb{R}^2$.

13

DIRE PER QUALI VALORI DEL PARAMETRO $\alpha > 0$ ESISTE IL LIMITE:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^{20} \cdot y^{18} \cdot |z|^\alpha}{(x^4 + y^{40} + z^{40})(x^{40} + y^4 + z^{40})(x^{40} + y^{40} + z^4)}$$

1 SVOLGIMENTI

PREMESSA: SICCOME $f(x,0)$ E $f(0,y)$ SONO IDENTICAMENTE NULLE, SE IL LIMITE ESISTE È NECESSARIAMENTE ZERO.

a MOSTRIAMO CHE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^2\cdot|y|^7}{(x^4+y^8)(x^8+y^4)} \quad \text{NON ESISTE.}$$

INFATTI RESTRINGENDO f ALL'INSIEME $\Gamma=\{(x,y) \mid x=y^2,\ y>0\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma}} \frac{|x|^2\cdot|y|^7}{(x^4+y^8)(x^8+y^4)} = \lim_{y\to0^+}\frac{y^4\cdot y^7}{2y^8\cdot(y^{16}+y^4)} = \lim_{y\to0^+}\frac{y^{11}}{y^{12}+o(y^{12})} = +\infty$$

QUINDI IL LIMITE NON PUÒ ESSERE ZERO E PERCIÒ, IN BASE ALLA PREMESSA NON ESISTE.

b SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^7\cdot|y|^3}{(x^4+y^8)(x^8+y^4)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{x^4}{x^4+y^8}}}_{\text{LIMITATA}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{(x^4)^{\frac12}\cdot(y^2)^{\frac32}}{(x^4)^2+(y^2)^2}}}_{\text{LIMITATA}}\cdot\underbrace{\boxed{|x|}}_{\to 0} = 0$$

PERCHÉ: $\sup\left\{\frac{(x^4)^{\frac12}(y^2)^{\frac32}}{(x^4)^2+(y^2)^2} \,\middle|\, (x,y)\neq(0,0)\right\} = \sup\left\{\frac{a^{\frac12}\cdot b^{\frac32}}{a^2+b^2} \,\middle|\, a\geq0,\ b\geq0\right\} =$

$= \sup\left\{\boxed{\frac{a^{\frac12}\cdot b^{\frac32}}{a^2+b^2}} \,\middle|\, \underline{a\geq0,\ b\geq0,\ a^2+b^2=1}\right\} = M<+\infty$

PERCHÉ ■ È OMOGENEA DI GRADO ZERO, VISTO CHE $\frac12+\frac32=2$

PERCHÉ ■ È CONTINUA E ■ È COMPATTO

c PER MOTIVI DI SIMMETRIA BASTA STUDIARE IL CASO $\boxed{\alpha\geq\beta>0}$.

SI VEDE SUBITO CHE DEVE ESSERE $\alpha>4$, ALTRIMENTI, SE $\alpha\leq4$ SI HA

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=y>0}} f(x,y) = \lim_{x\to0^+} f(x,x) = \lim_{x\to0^+}\frac{|x|^{\alpha+\beta}}{x^8+o(x^8)} \neq 0$$

PERCHÉ $\alpha+\beta\leq2\alpha\leq8$

È ANCHE IMMEDIATO CONSTATARE CHE SE $\alpha\geq\beta>4$ IL LIMITE È ZERO PERCHÉ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{x^4}{x^4+y^8}}}_{\leq1}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{y^4}{x^8+y^4}}}_{\leq1}\cdot\underbrace{|x|^{\alpha-4}}_{\to0}\cdot\underbrace{|y|^{\beta-4}}_{\to0} = 0$$

RIMANE DA STUDIARE IL CASO $\alpha>4\geq\beta>0$.

MOSTRIAMO CHE IN TAL CASO IL LIMITE ESISTE (E VALE ZERO) SE E SOLO SE $\alpha+2\beta>12$.

IN TAL CASO INFATTI:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\boxed{\frac{x^4}{x^4+y^8}}}_{\text{LIMITATO}}\cdot\boxed{\frac{(x^2)^{4-\beta}\cdot|y|^\beta}{(x^2)^4+y^4}}\cdot\underbrace{\boxed{|x|^{\alpha-4-8+2\beta}}}_{\to0} = 0$$

PERCHÉ $\alpha+2\beta>12$

LIMITATO PERCHÉ $\frac{a^{4-\beta}\cdot b^\beta}{a^4+b^4}$ È OMOGENEA DI GR. ZERO

VICEVERSA, SE $\alpha+2\beta\leq 12$, RESTRINGENDOSI A $y=x^2$, SI HA

PERCHÉ $\alpha+2\beta\leq 12$

$$\lim_{x\to0^+} f(x,x^2)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|^{\alpha}\cdot(x^2)^{\beta}}{(x^4+x^8)(x^8+x^8)}=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|^{\alpha+2\beta}}{x^{12}+o(x^{12})}\neq 0$$

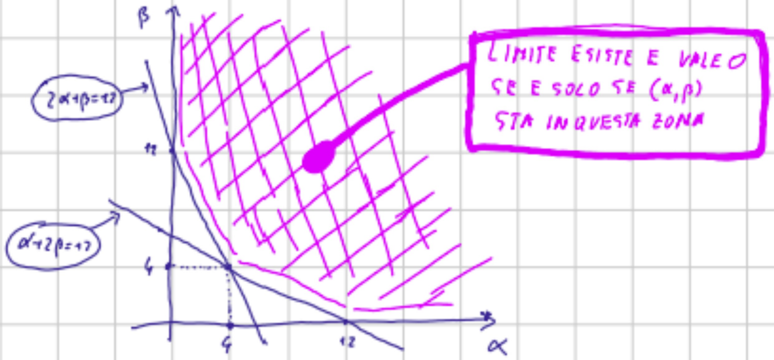
RIASSUMENDO NEL CASO $\alpha\geq\beta>0$ IL LIMITE ESISTE (E VALE ZERO)

SE E SOLO SE $\alpha+6\beta>12$.

SIMMETRICAMENTE, SE $\beta\geq\alpha>0$, IL LIMITE ESISTE (E VALE ZERO)

SE E SOLO SE $\beta+6\alpha>12$.

RIPORTIAMO QUI DI SEGUITO IL DIAGRAMMA CHE RIASSUME LA CASISTICA



2

a) f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ SE E SOLO SE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot x-f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \tag{5}$$

SICCOME $f(x,0)$ E $f(0,y)$ SONO IDENTICAMENTE NULLE, SI HA $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$ E $f_y(0,0)=0$. PER CUI IL LIMITE DI (5) SI RISCRIVE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

CIOÈ:

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{(2x^2+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

MA TALE LIMITE NON PUÒ VALERE ZERO PERCHÉ ESISTE ALMENO UNA RESTRIZIONE LUNGO LA QUALE NON VA A ZERO, AD ESEMPIO, SE $y=x>0$ DIVENTA:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3}{5x^2\cdot\sqrt{2x^2}} = \frac{2}{5\sqrt{2}} \neq 0$$

CIÒ SIGNIFICA CHE f NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

$\boxed{b}$ IN QUESTO CASO f È IDENTICAMENTE NULLA FUORI DA $\Omega=\{(x,y)\mid 0\le y<x\sqrt{x}\}$ MENTRE COINCIDE CON LA f DEL PUNTO $\boxed{a}$ SU Ω. CIÒ SIGNIFICA CHE PER VERIFICARE CHE f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ BASTA MOSTRARE CHE IL LIMITE (6) FA ZERO SE CI SI RESTRINGE A Ω.

SE $(x,y)\in\Omega$, CIOÈ SE $0\le y<x\sqrt{x}$, SI HA

$$0\le \frac{x^2y+xy^2}{(2x^2+3y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^3\sqrt{x}+x^4}{(2x^2+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2x^2+3y^2}}\cdot\boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}\cdot\boxed{(\sqrt{x}+x)}$$

$0\le \bullet\le\frac{1}{2}$ QUINDI LIMITATA

$0\le\bullet\le 1$ QUINDI LIMITATA

$\to 0$

QUESTO SIGNIFICA CHE SE $(x,y)\to(0,0)$ RIMANENDO IN Ω ALLORA IL LIMITE (6) È ZERO. QUINDI STAVOLTA f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

3

a) MOSTRIAMO CHE:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^6+|x|\cdot|y|+|y|^3}{x^2+y^2} = +\infty$$

PERCHÉ:

VALGONO LE STIME:

$$\frac{x^6+|x|\cdot|y|+|y|^3}{x^2+y^2} \geq \frac{x^6+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{x^6-|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \geq \frac{-\frac{1}{4}}{x^2+y^2} + \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$$

QUINDI, POICHÉ $\frac{-\frac{1}{4}}{x^2+y^2} \to 0$ PER $(x,y)\to\infty$, BASTERÀ MOSTRARE CHE:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \infty$$

COSA CHE È OVVIA VISTO CHE $\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$ È POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO 1 ED HA UN MINIMO STRETTAMENTE POSITIVO SULLA CIRCONFERENZA UNITARIA.

a) (MODO ALTERNATIVO)

SICCOME FACCIAMO IL LIMITE PER $(x,y)\to\infty$ POSSIAMO SEMPRE SUPPORRE CHE SIA $x^2+y^2\geq 1$. DI CONSEGUENZA, PASSANDO IN COORDINATE POLARI, SI HA:

$$\frac{x^6+|x||y|+|y|^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^6\cos^6\theta+\rho^2|\cos\theta\sin\theta|+\rho^3|\sin\theta|^3}{\rho^2} \geq$$

DOVE SI È POSTO $x=\rho\cos\theta$ E $y=\rho\sin\theta$

$$\geq \rho\cdot\left(\rho^3\cos^6\theta+|\sin\theta|^3\right) \geq$$

DOVE $M=\min_{0\leq\theta\leq 2\pi} \cos^6\theta+|\sin\theta|^3$ ED $M>0$ PER T. DI WEIERSTRASS

PERCHÉ $x^2+y^2\geq 1$

$$\geq \rho\left(\cos^6\theta+|\sin\theta|^3\right) \geq \rho\cdot M = M\sqrt{x^2+y^2}$$

QUINDI SI OTTIENE LA TESI PERCHÉ $M\cdot\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty$ PER $(x,y)\to\infty$.

$\boxed{b}$ RESTRINGENDOSI ALL'ASSE x, QUALSIASI SIANO α E β, SI HA COMUNQUE:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ \{y=0\}}} \frac{x^6+|x|\cdot|y|^\alpha+|y|^\beta}{x^2+y^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty .$$

QUINDI CHIEDERE QUANDO IL LIMITE ESISTE EQUIVALE A CHIEDERE QUANDO VALE $+\infty$.

MOSTRIAMO CHE QUESTO ACCADE SE E SOLO SE $\beta>2$, INDIPENDENTEMENTE DAI VALORI DI α.

SE $0<\beta\leq 2$, INFATTI, QUALUNQUE SIA IL VALORE DI α, RESTRINGENDOSI ALL'ASSE y SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ \{x=0\}}} \frac{x^6+|x|\cdot|y|^\alpha+|y|^\beta}{x^2+y^2} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{|y|^{2-\beta}} = \begin{cases} = 0 & \text{SE } 0<\beta<2 \\ = 1 & \text{SE } \beta=2 \end{cases}$$

QUINDI SE $0<\beta\leq 2$ IL LIMITE RICHIESTO NON PUÒ VALERE $+\infty$.

INVECE, SE $\beta>2$, COMUNQUE SI PRENDA $\alpha>0$, SI HA:

$$\frac{x^6+|x|\cdot|y|^\alpha+|y|^\beta}{x^2+y^2} \geq \frac{x^6+|y|^\beta}{x^2+y^2}$$

PASSANDO IN COORDINATE POLARI $x=\rho\cos\theta$ E $y=\rho\sin\theta$, SI OTTIENE:

$$(1) \qquad \frac{x^6+|y|^\beta}{x^2+y^2} = \frac{\rho^6\cos^6\theta+\rho^\beta|\sin\theta|^\beta}{\rho^2} = \begin{cases} = \rho^{\beta-2}\left(\rho^{6-\beta}\cos^6\theta+|\sin\theta|^\beta\right) & \text{SE } 6\geq\beta \\ = \rho^{6-2}\left(\cos^6\theta+\rho^{\beta-6}|\sin\theta|^\beta\right) & \text{SE } \beta>6 \end{cases}$$

MA, VISTO CHE $(x,y)\to\infty$, POSSIAMO SUPPORRE $x^2+y^2\geq 1$, QUINDI $\rho^{6-\beta}\geq 1$ SE $6\geq\beta$ E $\rho^{\beta-6}\geq 1$ SE $\beta\geq 6$, E PERCIÒ LA (1) DIVENTA:

$$\frac{x^6+y^\beta}{x^2+y^2} \geq \begin{cases} \geq \rho^{\beta-2}\cdot\left(\cos^6\theta+|\sin\theta|^\beta\right) & \text{SE } 6\geq\beta \\ \geq \rho^{6-2}\cdot\left(\cos^6\theta+|\sin\theta|^\beta\right) & \text{SE } \beta>6 \end{cases}$$

QUINDI IN OGNI CASO OTTENIAMO UNA DISUGUAGLIANZA DEL TIPO

$$\frac{x^6+|y|^\beta}{x^2+y^2} \geq \rho^\gamma\cdot M$$

DOVE $\gamma>0$ E $M=\min_{0\leq\theta\leq 2\pi}\left(\cos^6\theta+|\sin\theta|^\beta\right)>0$.

A QUESTO PUNTO LA TESI SEGUE DAL FATTO CHE PER $(x,y)\to\infty$ SI ABBIA $\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty$, CIOÈ $\rho\to+\infty$.

4

PER PRIMA COSA, IN TUTTI I PUNTI (x,y) AVENTI $x\neq 0$, f È DIFFERENZIABILE PERCHÈ COMPOSIZIONE DI FUNZIONI C^1.

RIMANE DA STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ IN PUNTI DEL TIPO $(0,y_0)$.

MOSTREREMO CHE f È DIFFERENZIABILE IN $(0,y_0)$ SE E SOLO SE y_0 STA NELL'INSIEME $A=\{0\}\cup\{\pm\frac{1}{k\pi}\mid k\in\mathbb{N}-\{0\}\}$.

SE $y_0\notin A$ SI HA:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h,y_0)-f(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\cdot\sqrt{h^2+y_0^2}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+y_0^2}}}{h}=|y_0|\cdot\sin\frac{1}{|y_0|}\underset{\text{PERCHÈ } y_0\notin A}{\neq} 0$$

INOLTRE

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h,y_0)-f(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{0-0}{h}=0$$

QUINDI, SE $y_0\notin A$ $f_x(0,y_0)$ NON ESISTE, QUINDI f NON È DERIVABILE E QUINDI NEMMENO DIFFERENZIABILE.

SE INVECE $y_0\in A$ SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(0,y_0)}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}=\begin{cases}\overset{x\leq 0}{=}\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\frac{0}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}=0\\[2ex]\overset{x>0}{=}\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\frac{x\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}=\end{cases}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\left(\underbrace{\boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-y_0)^2}}}}_{\text{LIMITATO}}\cdot\underbrace{\boxed{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}_{\to 0}\right)=0$$

SE $\boxed{y_0=0}$ PERCHÈ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\underbrace{\boxed{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\boxed{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}_{\text{LIMITATO}}\right)=0$$

SE $\boxed{y_0=\pm\frac{1}{k\pi}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=|y_0|\cdot\underbrace{\boxed{\sin\frac{1}{|y_0|}}}_{=0 \text{ PERCHÈ } y_0=\pm\frac{1}{k\pi}}=0$$

QUINDI NEI PUNTI DEL TIPO $(0,y_0)$, CON $y_0\in A$, $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE E $\nabla f(0,y_0)=(0,0)$.

5

SI HA:

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|x|^3 \cdot y^4}{x^8+y^6} = \frac{(x^4)^{\frac{3}{4}} \cdot (|y^3|)^{\frac{4}{3}}}{(x^4)^2+(|y^3|)^2} = \boxed{(x^4)^{\frac{1}{12}}} \cdot \boxed{\frac{(x^4)^{\frac{2}{3}} \cdot (|y^3|)^{\frac{4}{3}}}{(x^4)^2+(|y^3|)^2}}$$

$\downarrow$ 0

LIMITATA, PERCHÉ DELLA FORMA

$$\frac{u^\alpha \cdot v^\beta}{u^2+v^2}$$

CON $\alpha+\beta=2$

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO, SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

PERCIÒ f È CONTINUA IN $(0,0)$.

INVECE f NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ PERCHÉ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot x - f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - 0 - 0\cdot x - 0 \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^4}{(x^8+y^6)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \text{NON ESISTE}$$

QUESTO PERCHÉ SE CI SI RESTRINGE AGLI ASSI VIENE ZERO, MENTRE SE CI SI RESTRINGE ALLA SEMIRETTA $y=x$ CON $x>0$ SI OTTIENE:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^3 \cdot x^4}{(x^8+x^6)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ne 0$$

6A

(a) POICHÉ $f(0,y)$ È IDENTICAMENTE NULLA PER OGNI α, $f(x,y)$ È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ IN $(0,0)$ SE E SOLO SE $f(x,y)\to 0$ PER $(x,y)\to(0,0)$. MOSTRIAMO CHE CIÒ ACCADE SE E SOLO SE $\alpha>6$.

LIMITATA PERCHÉ, POSTO $a=x^5$ E $b=y^3$ SI OTTIENE $\frac{a^6 \cdot b^2}{a^8+b^8}$ CHE È LIMITATA SULLA CIRCONFERENZA UNITARIA GRAZIE AL T. DI WEIERSTRASS. INOLTRE È COSTANTE SULLE SEMIRETTE CHE NASCONO IN $(0,0)$ PERCHÉ È POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO ZERO. QUINDI È LIMITATA SU TUTTO $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

SE $\alpha>6$ SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{30}\cdot|y|^{\alpha}}{x^{40}+y^{24}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|x^5|^6\cdot|y^3|^2}{|x^5|^8+|y^3|^8}}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{|y|^{\alpha-6}}_{\substack{\downarrow\ \alpha>6 \\ 0}} = 0$$

D'ALTRA PARTE, POSTO:

$$\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0,\ y^3=x^5\}$$

SE $0<\alpha\le 6$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma}} f(x,y) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{30+\frac{5}{3}\alpha}}{2\cdot x^{40}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{5}{3}\alpha-10} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{SE } \alpha=6 \\ +\infty & \text{SE } \alpha<6 \end{cases}$$

QUINDI SE $\alpha\le 6$ IL LIMITE NON PUÒ ESSERE ZERO E PERCIÒ, PER QUANTO DETTO PRIMA, NON PUÒ ESISTERE.

(b) L'ESTENSIONE DI $f(x,y)$ È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ SE E SOLO SE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

CIOÈ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

DOBBIAMO QUINDI TROVARE PER QUALI $\alpha>6$ VALE ZERO IL LIMITE:

(9)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{30}|y|^{\alpha}}{(x^{40}+y^{24})\cdot\sqrt{x^2+y^2}}.$$

MOSTRIAMO CHE QUESTO ACCADE SE E SOLO SE $\alpha>6+\frac{3}{5}$.

SI RAGIONA COME NEL PUNTO (a) PONENDO $a=x^5$ E $b=y^3$

INFATTI SE $\alpha>6+\frac{3}{5}$ IL LIMITE (9) DIVENTA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{|x^5|^{\frac{29}{5}}\cdot|y^3|^{\frac{11}{5}}}{|x^5|^8+|y^3|^8}}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{LIMITATA}} \cdot \underbrace{|y|^{\alpha-\frac{33}{5}}}_{\substack{\downarrow\ \alpha>6+\frac{3}{5} \\ 0}} = 0$$

INVECE, SE $0<\alpha\le 6+\frac{3}{5}$, PRESA Γ COME IN (8) SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{30}\cdot x^{\frac{5}{3}\alpha}}{2\cdot x^{40}\cdot\sqrt{x^2+x^{\frac{10}{3}}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{5}{3}\alpha-11} = \begin{cases} =\frac{1}{2} & \text{SE } \alpha=6+\frac{3}{5} \\ =+\infty & \text{SE } \alpha<6+\frac{3}{5} \end{cases}$$

QUINDI IL LIMITE (9) VALE ZERO SE E SOLO SE $\alpha>6+\frac{3}{5}$, DUNQUE PER TALI VALORI DI α SI HA LA DIFFERENZIABILITÀ.

6B

PROCEDENDO COME NELLA VERSIONE A SI TROVA CHE È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ SE E SOLO SE $\alpha>3$, MENTRE L'ESTENSIONE È ANCHE DIFFERENZIABILE SE E SOLO SE $\alpha>3+\frac{1}{3}$.

7

(a) SI OSSERVI CHE:

$$0 \le \frac{x^6 y^6}{x^{10}+y^{14}} = \frac{|x^5|^{\frac{6}{5}} \cdot |y^7|^{\frac{6}{7}}}{|x^5|^2 + |y^7|^2} =$$

LIMITATA PERCHÉ DELLA FORMA $\frac{u^\alpha \cdot v^\beta}{u^2+v^2}$ CON $\alpha+\beta=2$

$$= \boxed{\frac{|x^5|^{\frac{6}{5}} \cdot |y^7|^{\frac{4}{5}}}{|x^5|^2 + |y^7|^2}} \cdot |y^7|^{\underbrace{\frac{6}{7}-\frac{4}{5}}_{=\frac{2}{35}}} \le K \cdot |y|^{\frac{2}{5}}$$

QUINDI:

$$0 \le \frac{x^6 y^6}{x^{10}+y^{14}} \le k \cdot |y|^{\frac{2}{5}} \to 0$$

QUINDI

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 y^6}{x^{10}+y^{14}} = 0$$

PER IL T. DEL CONFRONTO.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6 y^6}{x^7+y^{14}}$ NON ESISTE.

INFATTI PRESO $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0,\ x \ge 0\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Gamma}} \frac{x^6 y^6}{x^7+y^{14}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x^7} = 0$$

INVECE PRESO $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y^2+y^7,\ y \ge 0\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\Lambda}} \frac{x^6 y^6}{x^7+y^{14}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{(-y^2+y^7)^6\, y^6}{(-y^2+y^7)^7 + y^{14}} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{18}+o(y^{18})}{-y^{14}+7y^{19}+o(y^{19})+y^{14}} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{18}+o(y^{18})}{7y^{19}+o(y^{19})} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{7y} = +\infty$$

CIÒ SIGNIFICA CHE SU RESTRIZIONI DIVERSE IL LIMITE ASSUME VALORI DIVERSI, COSA CHE NON POTREBBE SUCCEDERE SE IL LIMITE ESISTESSE.

QUINDI IL LIMITE NON ESISTE.

8

a) PER $A=0$ IL DENOMINATORE DIVENTA xy QUINDI LA FUNZIONE È DEFINITA FUORI DAGLI ASSI E VALE $x^{99}\cdot y^{99}$. QUINDI TENDE A 0 PER $(x,y)\to(0,0)$.

b) PER $A=1$ IL DENOMINATORE È $2xy+x^2+y^2$ QUINDI IL LIMITE DIVENTA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{100}y^{100}}{(x+y)^2}$$

CHE NON ESISTE PERCHÈ VALE 0 SE CI SI RESTRINGE AGLI ASSI, MENTRE SE CI SI RESTRINGE A $y = -x + x^{100}$ CON $x > 0$ SI HA:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{100} \cdot (-x + x^{100})^{100}}{(x - x + x^{100})^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{200} + o(x^{200})}{x^{200}} = 1$$

QUINDI PER $A = 1$ IL LIMITE NON ESISTE PERCHÈ SI OTTENGONO VALORI DIVERSI CAMBIANDO RESTRIZIONE.

c PER $A > 1$, INDICANDO CON $f(x,y)$ LA FUNZIONE DI CUI SI CALCOLA IL LIMITE, SI HA:

$$f(x,y) = \frac{x^{100} \cdot y^{100}}{(x+y)^2 + (A-1)(x^2+y^2)}$$

QUINDI, SICCOME $A > 1$, SI HA:

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{x^{100} \cdot y^{100}}{(A-1)(x^2+y^2)} = \underbrace{\boxed{|x|^{99} \cdot |y|^{99}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{2(A-1)}}}_{\text{COSTANTE}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{|2xy|}{x^2+y^2}}}_{\leq 1}$$

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$$

d MOSTRIAMO CHE PER $0 < A < 1$ IL LIMITE NON ESISTE.

OSSERVIAMO CHE LA FUNZIONE $f(x,y)$ DI CUI SI FA IL LIMITE È IDENTICAMENTE NULLA SUGLI ASSI QUINDI MOSTRARE CHE IL LIMITE NON ESISTE EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE NON PUÒ ESSERE 0. BASTA QUINDI TROVARE PUNTI ARBITRARIAMENTE VICINI A $(0,0)$ NEI QUALI $|f(x,y)|$ VALGA PIÙ DI 1.

A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE NEI PUNTI (x,y) CHE DISTANO ρ DA $(0,0)$, CIOÈ TALI CHE

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta \quad \text{CON } 0\leq\theta<2\pi$$

SI HA:

$$f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\frac{(\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta)^{100}}{2\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta+A\rho^2}=$$

(12)

$$=\rho^{198}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{100}}{\sin 2\theta+A}=\rho^{198}\cdot g(\theta)$$

DOVE ABBIAMO INDICATO CON $g(\theta)$ LA FUNZIONE DELLA SOLA θ CHE MOLTIPLICA ρ^{198}.

SI OSSERVI ORA CHE, ESSENDO $0<A<1$, ESISTE SENZ'ALTRO $\theta_0\in[0,2\pi)$ TALE CHE $\sin 2\theta_0=-A$.

SICCOME TALE θ_0 ANNULLA IL DENOMINATORE DI $g(\theta)$ MA NON IL NUMERATORE, SI AVRÀ CHE $|g(\theta)|\to+\infty$ PER $\theta\to\theta_0$.

DI CONSEGUENZA ESISTONO VALORI DI θ TALI CHE $|g(\theta)|>\frac{1}{\rho^{198}}$.

PER TALI θ LA (12) DIVENTA:

$$|f(x,y)|=\rho^{198}\cdot|g(\theta)|>\rho^{198}\cdot\frac{1}{\rho^{198}}=1$$

ABBIAMO QUINDI MOSTRATO CHE:

$$\forall\rho>0\ \exists(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ T.C. } d((x,y),(0,0))=\rho \text{ MA } |f(x,y)|>1$$

QUINDI $f(x,y)\not\to 0$ PER $(x,y)\to(0,0)$.

9

(a) È CONTINUA SE E SOLO SE $\alpha > \frac{5}{2}$.

INFATTI SE $\alpha = \frac{5}{2} + \delta$ CON $\delta > 0$, SI HA

LIMITATO PERCHÉ È DELLA FORMA $\frac{a^\alpha \cdot b^\beta}{a^2+b^2}$ CON $\alpha+\beta=2$

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|x|^{\frac{5}{2}+\delta} \cdot |y|^3}{(x^4+y^8)(1+x^4+y^8)} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+x^4+y^8}}}_{\text{LIMITATO}} \cdot \boxed{\frac{(x^2)^{\frac{5}{4}} \cdot (y^4)^{\frac{3}{4}}}{(x^2)^2+(y^4)^2}} \cdot \underbrace{|x|^\delta}_{\downarrow \, 0}$$

QUINDI $f(x,y) \to 0$ PER IL T. DEL CONFRONTO.

INVECE, SE $\alpha \le \frac{5}{2}$, POSTO $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2,\ y > 0\}$, SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Lambda}} f(x,y) = \lim_{y\to 0^+} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0^+} \frac{|y|^{3+2\alpha}}{2y^8\cdot(1+2y^8)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{1+2y^8} \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{2\alpha-5} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{SE } \alpha = \frac{5}{2} \\ +\infty & \text{SE } \alpha < \frac{5}{2} \end{cases}$$

QUINDI SE $\alpha \le \frac{5}{2}$ $f(x,y) \not\to 0$.

(b) È DIFFERENZIABILE SE E SOLO SE $\alpha > 3$. MOSTRIAMOLO.

VISTO CHE $f(x,y)$ È IDENTICAMENTE NULLA SUGLI ASSI, SI HA CHE

$$f(0,0) = 0 = f_x(0,0) = f_y(0,0)$$

QUINDI

$$\left(f \text{ È DIFFERENZIABILE IN } (0,0)\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\right)$$

MA TALE LIMITE VALE 0 SE E SOLO SE $\alpha > 3$.

INFATTI SE $\alpha = 3+\delta$ CON $\delta > 0$ SI HA:

$$0 \leq \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{1}{1+x^4+y^8}}_{\text{LIMITATI}} \cdot \underbrace{\frac{(x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot(y^4)^{\frac{4}{2}}}{(x^2)^2+(y^4)^2}}_{\text{LIMITATI}} \cdot \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{LIMITATI}} \cdot \underbrace{|y|^\delta}_{\to 0}$$

QUINDI IL NOSTRO LIMITE VALE 0 PER IL T. DEL CONFRONTO.

INVECE, SE $\alpha \leq 3$, E Λ È COME AL PUNTO **(a)**, SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Lambda}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{3+2\alpha}}{2y^8\cdot(1+2y^8)\sqrt{y^4+y^2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{y^{2\alpha-6}}{2\cdot(1+2y^8)\sqrt{y^2+1}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{SE } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{SE } \alpha < 3 \end{cases}$$

QUINDI, SE $\alpha \leq 3$ IL NOSTRO LIMITE NON PUÒ VALERE 0.

(c) È INFINITESIMA PER $(x,y)\to\infty$ SE E SOLO SE $0 < \alpha < \frac{13}{2}$. VERIFICHIAMOLO.

SE $\alpha \geq \frac{13}{2}$ E Λ È COME NEL PUNTO **(a)** SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty\\(x,y)\in\Lambda}} f(x,y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{3+2\alpha}}{2y^8\cdot(1+2y^8)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2y^8}+1}\cdot\frac{y^{2\alpha-13}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{SE } \alpha = \frac{13}{2} \\ +\infty & \text{SE } \alpha > \frac{13}{2} \end{cases}$$

SE INVECE $0 < \alpha < \frac{13}{2}$ SI HA:

$$0 \leq |f(x,y)| = \underbrace{\frac{x^4+y^8}{1+x^4+y^8}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+y^8}}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{y^4}{\sqrt{x^4+y^8}}\right)^{\frac{3}{4}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+y^8}}\right)^{4-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}}_{\to 0}$$

PERCHÉ, SE $\alpha < \frac{13}{2}$, ALLORA: $4-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4} = \frac{13-2\alpha}{4} > 0$

QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} |f(x,y)| = 0.$$