

INTEGRALE DI RIEMANN

ESERCIZI TEORICI

INDICE PROVVISORIO:

LISTA 19/20

PAG. 2

SOLUZIONI

PAG. 4

LISTA 20/21

PAG. 16

SOLUZIONI

PAG. 17

LISTA 22/23

PAG. 24

LISTA AGGIUNTIVA 19/20

PAG. 26

Analisi Matematica (II modulo) - Exe. 1

Titolo nota

4 marzo 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRALE DI RIEMANN - PROPRIETÀ ELEMENTARI

P.1 CALCOLARE $\mathcal{I}(f, \mathcal{P})$ E $S(f, \mathcal{P})$ NEI CASI SEGUENTI:

(a) $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ SU $[-1, 1]$ CON $\mathcal{P} = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

(b) COME (a) MA CON $f(x) = \chi_{(0,1]}(x)$

(c) $f(x) = x$ SU $[0, 1]$ CON $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\}$

(d) COME (c) MA CON $f(x) = e^x$

P.2 NEI CASI SEGUENTI STABILIRE SE f È $\mathbb{Q}$ -INTEGRABILE NELL'INTERVALLO INDICATO A FIANCO:

(a) $f(x) = x^2$ SU $[0, 1]$

(b) $f(x) = e^x$ SU $[0, 1]$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{SE } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{SE } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ SU $[-1, 1]$

(d) $f(x) = \chi_A(x)$ SU $[0, 1]$ DOVE $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ ED } m \leq 2^n \right\}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{SE } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$ SU $[0, 1]$, DOVE $\lfloor \dots \rfloor$ SIGNIFICA "PARTE INTERA DI"

P.3 USANDO SOLO LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN CALCOLARE I SEGUENTI INTEGRALI:

(a) $\int_0^1 x^2 dx$ $\left[\text{PUÒ ESSERE UTILE RICORDARE LA FORMULA} \right]$
 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(b) $\int_0^1 e^x dx$

(c) $\int_0^1 x^3 dx$ $\left[\text{PUÒ ESSERE UTILE RICORDARE LA FORMULA} \right]$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

P.4 (a) DATA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, LIMITATA, MOSTRARE CHE SE C'E UNA COSTANTE $\lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE L'INSIEME $\{x \in [a, b] \mid f(x) > \lambda\}$ È FINITO, ALLORA $\int_{[a, b]} f \leq \lambda \cdot (b-a)$

(b) UTILIZZANDO, SE SI VUOLE, IL PUNTO (a), MOSTRARE CHE È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN SU $[0, 1]$ LA FUNZIONE:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{SE } x = \frac{m}{n} \text{ CON } m, n \text{ INTERI POSITIVI COPRIMI} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

P.5 DIRE SE APPARTIENE A $\mathcal{R}([0, 1])$ LA FUNZIONE:

$$g(x) = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \cdot \frac{-1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor^2} & \text{SE } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SOLUZIONI

$$P1(a) \quad \Delta(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$P1(b) \quad \Delta(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

$$P1(c) \quad \Delta(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10} - \frac{i-1}{10} \right) \cdot \inf_{x \in [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]} x =$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \frac{(i-1)}{10} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{10} (i-1) = \frac{1}{100} \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = \frac{9}{20}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10} - \frac{i-1}{10} \right) \cdot \sup_{x \in [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]} x =$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot \frac{i}{10} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{10} i = \frac{1}{100} \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = \frac{11}{20}$$

$$P1(d) \quad \Delta(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10} - \frac{i-1}{10} \right) \cdot \inf_{x \in [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]} e^x =$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{i-1}{10}} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 \left(e^{\frac{1}{10}} \right)^k =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{e^{\frac{10}{10}} - 1}{e^{\frac{1}{10}} - 1} = \frac{e - 1}{\frac{e^{\frac{1}{10}} - 1}{\frac{1}{10}}}$$

$$\begin{aligned}
 S(f, P) &= \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{10} - \frac{i-1}{10} \right) \cdot \sup_{x \in [\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10})} e^x = \\
 &= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot e^{\frac{i}{10}} = \frac{e^{\frac{1}{10}}}{10} \sum_{k=0}^9 \left(e^{\frac{1}{10}} \right)^k = \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{10}}}{10} \cdot \frac{e^{\frac{10}{10}} - 1}{e^{\frac{1}{10}} - 1} = e^{\frac{1}{10}} \cdot \frac{e - 1}{\frac{e^{\frac{1}{10}} - 1}{\frac{1}{10}}}
 \end{aligned}$$

P2(a) BASTA OSSERVARE CHE $f(x) = x^2$ È CONTINUA SU $[0,1]$ E QUINDI È $\mathbb{R}$ -INTEGRABILE

P2(b) BASTA OSSERVARE CHE $f(x) = e^x$ È CONTINUA SU $[0,1]$ E QUINDI È $\mathbb{R}$ -INTEGRABILE

P2(c) PER OGNI $\varepsilon > 0$ SI PRENDA $c = \frac{\varepsilon}{4}$, POI SI PRENDA P' PARTIZIONE DI $[c, 1]$ TALE CHE $S(f, P') - \underline{s}(f, P') < \frac{\varepsilon}{2}$ (SI PUÒ FARE PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([c, 1])$ IN QUANTO È CONTINUA SU $[c, 1]$).

SIA ORA P LA PARTIZIONE DI $[-1, 1]$ DATA DA $P = \{-1, 0\} \cup P'$. SI HA:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \underline{s}(f, P) &= (0 - (-1)) \cdot \inf_{x \in [-1, 0)} f(x) + (c - 0) \cdot \inf_{x \in [0, c)} f(x) + \underline{s}(f, P') = \\
 &= 1 \cdot 0 + \frac{\varepsilon}{4} \cdot (-1) + \underline{s}(f, P')
 \end{aligned}$$

ANALOGAMENTE SI HA:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad S(f, P) &= (0 - (-1)) \cdot \sup_{x \in [-1, 0)} f(x) + (c - 0) \cdot \sup_{x \in [0, c)} f(x) + S(f, P') = \\
 &= 1 \cdot 0 + \frac{\varepsilon}{4} \cdot 1 + S(f, P')
 \end{aligned}$$

QUINDI, SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO (2) E (1), SI OTTIENE:

$$S(f, P) - \tau(f, P) = \frac{\varepsilon}{2} + S(f, P') - \tau(f, P') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ABBIAMO QUINDI VERIFICATO CHE, COMUNQUE SI SCELGA $\varepsilon > 0$,
E POSSIBILE COSTRUIRE UNA PARTIZIONE P DI $[-1, 1]$ PER LA
QUALE SI ABBA $S(f, P) - \tau(f, P) < \varepsilon$.
QUESTO DIMOSTRA CHE $f \in \mathcal{R}([-1, 1])$.

CON UN PROCEDIMENTO ANALOGO
SI DIMOSTRA CHE SE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
È LIMITATA ED HA UN SOLO PUNTO
DI DISCONTINUITÀ ALLORA $f \in \mathcal{R}([a, b])$

P2(d) L'INSIEME A È DENSO IN $[0, 1]$. INFATTI, COMUNQUE SI PRENDA
UN INTERVALLINO $(a, b) \subset [0, 1]$, BASTA SCEGLIERE $m_0 \in \mathbb{N}$ IN MODO CHE

$$(3) \quad \frac{1}{2^{m_0}} < b - a$$

POI PRENDERE IL PIÙ PICCOLO $k_0 \in \mathbb{N}$ PER IL QUALE

$$\frac{k_0}{2^{m_0}} > a$$

IL NUMERO $\frac{k_0}{2^{m_0}}$ STA NECESSARIAMENTE IN (a, b) PERCHÉ ALTRIMENTI,
SE FOSSE ANCHE MAGGIORE O UGUALE A b , SI AVREBBE:

$$\frac{k_0}{2^{m_0}} - \frac{k_0 - 1}{2^{m_0}} \geq b - a$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{2^{m_0}} \geq b - a$$

IN CONTRADDIZIONE CON (3).

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE, COMUNQUE SI SCELGA $(a, b) \subset [0, 1]$
ESISTE UN ELEMENTO DI A CHE STA IN (a, b) . QUINDI A È DENSO IN $[0, 1]$.
IL FATTO CHE ANCHE IL COMPLEMENTARE DI A SIA DENSO IN $[0, 1]$ SEGUE
SUBITO DAL FATTO CHE A È NUMERABILE.

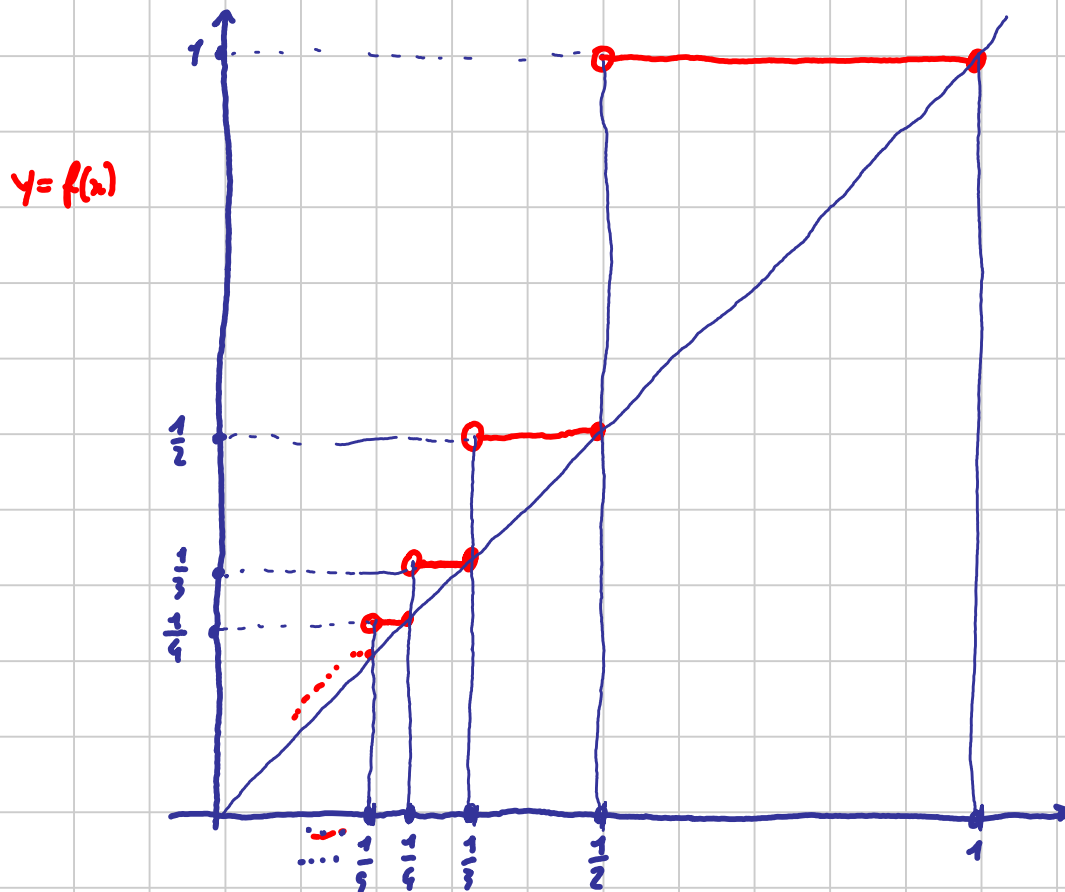
A QUESTO PUNTO, COME FATTO A LEZIONE PER LA FUNZIONE DI DIRICHLET, DAL FATTO CHE A È DENSO IN $[0,1]$ SEGUE CHE $\int_{[0,1]}^+ \chi_A = 1$, MENTRE DAL FATTO CHE È DENSO IL SUO COMPLEMENTARE SEGUE CHE $\int_{[0,1]}^- \bar{\chi}_A = 0$.
 QUINDI $\chi_A \notin \mathcal{R}([0,1])$.

P2(e) PER MOSTRARE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$ BASTA VERIFICARE CHE f È CRESCENTE.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{x} < n+1 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n$$

CIÒ SIGNIFICA CHE, PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SULL'INTERVALLO $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ LA FUNZIONE VALE $\frac{1}{n}$. QUINDI IL SUO GRAFICO È IL SEGUENTE:



DAL FATTO CHE f È CRESCENTE DEDUCIAMO CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$

P3(a) PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA $\mathcal{O}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.

POICHÉ $f(x) = x^2$ SI HA:

$$\begin{aligned} (4) \quad s(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \inf_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]} x^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} - \frac{3n-1}{6n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad S(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \sup_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]} x^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{3n+1}{6n^2} \end{aligned}$$

DA (4), PASSANDO AL SUP PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI OTTIENE:

$$\int_{[0,1]}^- x^2 \geq \frac{1}{3}$$

MENTRE DA (5), PASSANDO ALL' INF PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI OTTIENE

$$\int_{[0,1]}^+ x^2 \leq \frac{1}{3}$$

METTENDO INSIEME LE 2 COSE SI HA:

$$\frac{1}{3} \leq \int_{[0,1]}^- x^2 \leq \int_{[0,1]}^+ x^2 \leq \frac{1}{3}$$

DA CUI SEGUE CHE x^2 È R-INTEGRABILE SU $[0,1]$ E $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

P3(b) PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. SI HA:

$$\begin{aligned} (6) \quad \int(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \inf_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})} e^x = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^{i-1} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(e^{\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad \int(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \sup_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})} e^x = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^i = \\ &= \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{(e^{\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1) \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \end{aligned}$$

DA (6) SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^- e^x \geq \sup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \int(f, \mathcal{P}_n) = \sup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (e-1) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \geq \lim_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (e-1) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e-1$$

MENTRE DA (7), SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^+ e^x \leq \inf_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \int(f, \mathcal{P}_n) = \inf_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (e-1) \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \leq \lim_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (e-1) \cdot e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e-1$$

METTENDO INSIEME LE 2 COSE SI HA:

$$e-1 \leq \int_{[0,1]}^- e^x \leq \int_{[0,1]}^+ e^x \leq e-1$$

DA CUI SEGUE CHE e^x È $\mathcal{R}$ -INTEGRABILE SU $[0,1]$ E $\int_0^1 e^x dx = e-1$.

P3(c) PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA $\mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. SI HA:

$$\begin{aligned} (8) \quad s(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \inf_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} x^3 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^n (i-1)^3 = \\ &= \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{2n-1}{n^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \quad S(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \sup_{x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} x^3 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n} \right)^3 = \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{i=1}^n i^3 = \\ &= \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2n+1}{n^2}. \end{aligned}$$

DA (8), PASSANDO AL SUP PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA:

$$\int_{[0,1]}^- x^3 \geq \frac{1}{4}$$

ANALOGAMENTE DA (9) SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^+ x^3 \leq \frac{1}{4}$$

METTENDO INSIEME LE 2 COSE SI HA:

$$\frac{1}{4} \leq \int_{[0,1]}^- x^3 \leq \int_{[0,1]}^+ x^3 \leq \frac{1}{4}$$

DA CUI SEGUE CHE x^3 È R-INTEGRABILE SU $[0,1]$ E $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

P.4(a)

L'AFFERMAZIONE (a) PUÒ ESSERE RIFORMULATA NEL MODO SEGUENTE:

(a') SIA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA E SIA $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$\{x \in [a, b] \mid f(x) > \lambda\}$ È FINITO, ALLORA

$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ T.C. $S(f, \mathcal{P}) < \lambda(b-a) + \varepsilon$

DIMO DI (a')

SI DIMOSTRA PER INDUZIONE SUL NUMERO DI PUNTI DELL'INSIEME

$\{x \in [a, b] \mid f(x) > \lambda\}$ CHE, PER COMODITÀ, INDICHEREMO CON I_λ .

PASSO 1 I_λ HA UN SOLO PUNTO, CIOÈ $I_\lambda = \{\bar{x}\}$.

CI SONO 3 CASI: $\bar{x} \in (a, b)$, $\bar{x} = a$, $\bar{x} = b$.

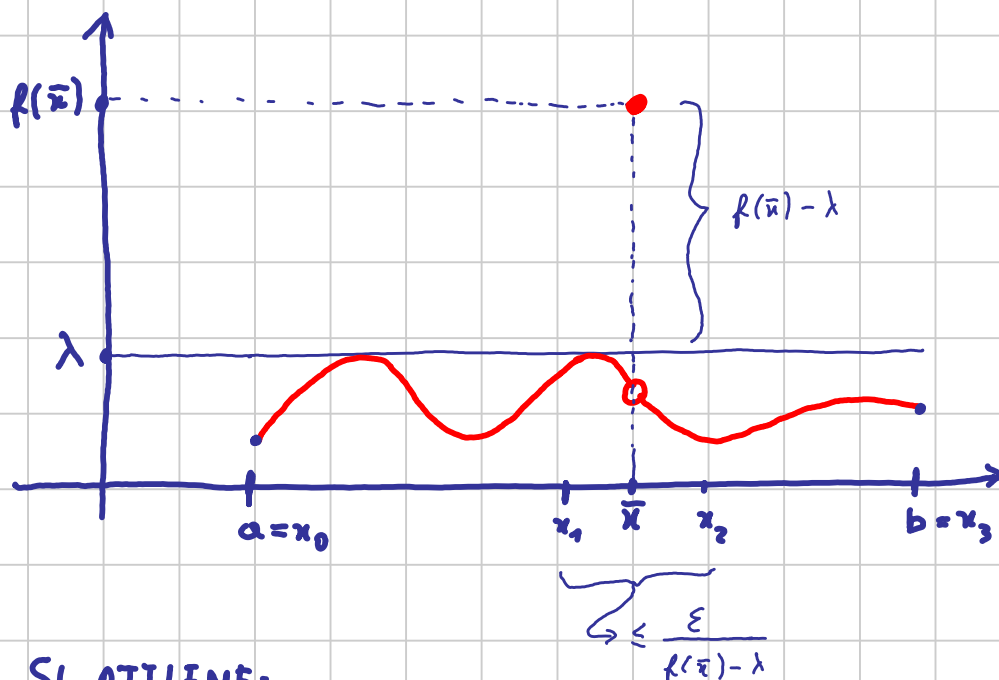
TRATTIAMO IN DETTAGLIO SOLO IL PRIMO, GLI ALTRI SONO DEL TUTTO ANALOGHI.

$\forall \varepsilon > 0$ SCEGLIAMO $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ IN MODO CHE:

(10)

$$x_1 < \bar{x} < x_2 \quad \text{E} \quad x_2 - x_1 < \frac{\varepsilon}{f(\bar{x}) - \lambda}$$

COME VEDIAMO IN FIGURA:



SI OTTIENE:

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) &= (x_1 - x_0) \cdot M_1 + (x_2 - x_1) \cdot f(\bar{x}) + (x_3 - x_2) M_3 \leq \\ &\leq (x_1 - x_0) \cdot \lambda + (x_2 - x_1) \cdot f(\bar{x}) + (x_3 - x_2) \lambda = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) \right) \cdot \lambda + (x_2 - x_1) \cdot (f(\bar{x}) - \lambda) = \\
&= (b-a) \cdot \lambda + (x_2 - x_1) \cdot (f(\bar{x}) - \lambda) < \\
&< (b-a) \cdot \lambda + \frac{\varepsilon}{f(\bar{x}) - \lambda} \cdot (f(\bar{x}) - \lambda) = (b-a) \cdot \lambda + \varepsilon.
\end{aligned}$$

PASSO 2 SE (a') VALE QUANDO I_λ HA AL MASSIMO k PUNTI ALLORA VALE ANCHE QUANDO HA $k+1$ PUNTI.

INFATTI SIA $I_\lambda = \{ \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1} \}$.

PRENDIAMO C T.C. $\bar{x}_k < c < \bar{x}_{k+1}$.

GRAZIE ALL'IPOTESI INDUTTIVA, $\forall \varepsilon > 0 \exists \rho_1$ PARTIZIONE DI $[a, c]$ ED $\exists \rho_2$ PARTIZIONE DI $[c, b]$ T.C.

$$S(f, \rho_1) < \lambda \cdot (c-a) + \frac{\varepsilon}{2}$$

E

$$S(f, \rho_2) < \lambda(b-c) + \frac{\varepsilon}{2}$$

MA ALLORA $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$ È UNA PARTIZIONE DI $[a, b]$ E SI HA:

$$S(f, \rho) = S(f, \rho_1) + S(f, \rho_2) < \lambda(c-a) + \frac{\varepsilon}{2} + \lambda(b-c) + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda(b-a) + \varepsilon$$

QUINDI ρ È LA PARTIZIONE RICHIESTA PER $[a, b]$

A QUESTO PUNTO, COMBINANDO **PASSO 1** E **PASSO 2**, LA (c') SEGUE PER INDUZIONE.

P4(b) NEL CASO DELLA NOSTRA $f(x)$, RISTRETTA A $[0, 1]$, L'INSIEME

$I_\lambda = \{ x \in [0, 1] \mid f(x) > \lambda \}$ È FINITO PER OGNI $\lambda > 0$.

INFATTI:

$$f(x) > \lambda \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{n} \quad \text{CON } 0 < n < \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{m}{n} \quad \text{CON } 0 < n < \frac{1}{\lambda} \text{ E } m \text{ COPRIMO CON } n$$

CIÒ SIGNIFICA CHE:

$I_\lambda =$ INSIEME DI TUTTE LE FRAZIONI, COMPRESSE TRA 0 E 1, TALI CHE, RIDOTTE AI MINIMI TERMINI HANNO DENOMINATORE MINORE DI $\frac{1}{\lambda}$.

AD ESEMPIO, SE $\lambda = \frac{1}{6}$, SI HA:

$$I_\lambda = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$$

SI TRATTA SEMPRE DI UN INSIEME FINITO, VISTO CHE LE FRAZIONI CON FISSATO DENOMINATORE k , CHE STANNO IN $[0, 1]$ NON SONO MAI PIÙ DI k .

DUNQUE, VISTO CHE PER OGNI $\lambda > 0$ L'INSIEME I_λ È FINITO, POSSIAMO APPLICARE P4(a) DIRE CHE:

$$\forall \lambda > 0 \quad \int_{[0,1]}^+ f \leq \lambda \cdot 1$$

DA CUI SEGUE:

$$\int_{[0,1]}^+ f(x) \leq 0$$

MA DA $f \geq 0$ SEGUE ANCHE CHE:

$$\int_{[0,1]}^- f(x) \geq 0$$

QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$ E $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

P.5 PROCEDENDO COME IN P2(e) SI OSSERVA CHE, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA

$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, QUINDI SI HA:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} & \text{PER } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\}) \\ 0 & \text{PER } x = 0 \end{cases}$$

PURTROPPPO PERÒ, A DIFFERENZA DELLA $f(x)$ DI $\boxed{P_2(e)}$, $g(x)$ NON È MONOTONA (PER COLPA DEL $(-1)^{n+1}$).

TUTTAVIA È POSSIBILE ESPRIMERLA COME DIFFERENZA DI FUNZIONI

CRESCENTI NEL MODO SEGUENTE: DETTA $f(x)$ LA FUNZIONE DEL $\boxed{P_2(e)}$ SI HA:

$$(11) \quad g(x) = (g(x) + 3f(x)) - 3f(x)$$

VISTO CHE $f(x)$ È CRESCENTE BASTERÀ VERIFICARE CHE ANCHE $g(x) + 3f(x)$ È CRESCENTE. SI HA:

$$g(x) + 3f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{3}{n} & \text{PER } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad (n \in \mathbb{N} - \{0\}) \\ 0 & \text{PER } x=0 \end{cases}$$

SICCOME $g+3f$ È COSTANTE A TRATTI, PER VERIFICARE CHE È CRESCENTE BASTERÀ MOSTRARE CHE I SALTI (CHE SONO NEI PUNTI $x_n = \frac{1}{n}$ CON $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$) SONO TUTTI POSITIVI.

SE n È PARI, IL SALTO IN $x = \frac{1}{n}$ È:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{(-1)^n}{(n-1)^2} + \frac{3}{n-1}\right) - \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{3}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{3}{n-1}\right) - \left(\frac{-1}{n^2} + \frac{3}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} = \\ &= \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n(n-1)} > 0 \end{aligned}$$

SE INVECE n È DISPARI SI HA:

$$S\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{(-1)^n}{(n-1)^2} + \frac{3}{n-1}\right) - \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{3}{n}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-1}{(n-1)^2} + \frac{3}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} \right) = \\
&= -\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} = \\
&= -\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n(n-1)} = \\
&= -\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right)^2 + \frac{1}{n(n-1)} = \\
&= \frac{1}{n(n-1)} - \left(\frac{1}{n(n-1)} \right)^2 > 0
\end{aligned}$$

PERCHÉ $n \geq 2$

QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE $g(n) + 3f(n)$ È CRESCENTE, E QUINDI ANCHE $\mathbb{Q}$ -INTEGRABILE.

GIÀ SAPPIAMO DAL $[P2(e)]$ CHE ANCHE f LO È.

QUINDI $g \in \mathcal{Q}([0,1])$ PERCHÉ, GRAZIE A (11), È COMBINAZIONE LINEARE DI FUNZIONI DI $\mathcal{Q}([0,1])$.

BOZZA DEL 05/03/2020
(SEGNALATEMI EVENTUALI REFUSI)

PROBLEMI AGGIUNTIVI PER EXE 1

P.1 USANDO SOLO LA DEFINIZIONE CALCOLARE

a) $\int_0^3 \chi_{[1,2]}(x) dx$

b) $\int_0^3 \chi_{(1,2)}(x) dx$

c) $\int_{-1}^1 \sin x dx$

P.2 SIA $f \in \mathcal{R}([-1,1])$, SIA $A \subset [-1,1]$ UN INSIEME FINITO
E SIA $g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [-1,1] - A$.
MOSTRARE CHE ANCHE $g \in \mathcal{R}([-1,1])$.

P.3 SIA $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} & \text{SE } x \in (0,1] \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

MOSTRARE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$

P.4 DATA $f \in \mathcal{R}([0,2])$ DEFINIAMO $g(x) = f(2x)$.

MOSTRARE CHE $g \in \mathcal{R}([0,1])$.

P.5 DATE $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA,
SE È VERO CHE IL LORO PRODOTTO $f \cdot g \in \mathcal{R}([a,b])$.

SOLUZIONI

P.1 **a** SIA $P = \{0, 1, 2, 3\}$. POSTO $f(x) = \chi_{(1,2)}^{(x)}$ SI HA:

$$\lambda(f, P) = (1-0) \cdot 0 + (2-1) \cdot 1 + (3-2) \cdot 0 = 1$$

$$S(f, P) = (1-0) \cdot 0 + (2-1) \cdot 1 + (3-2) \cdot 0 = 1$$

DA CUI SEGUE:

$$1 = \lambda(f, P) \leq \int^- f \leq \int^+ f \leq S(f, P) = 1$$

QUINDI SONO TUTTE UGUAGLIANZE, QUINDI $\int_0^3 f(x) dx = 1$

b STAVOLTA $f(x) = \chi_{(1,2)}^{(x)}$ E QUINDI $f(2) = 0$.

DI CONSEGUENZA I CALCOLI DEL PUNTO **a** FUNZIONANO SOLO PER MOSTRARE CHE $S(f, P) = 1$, E QUINDI $\int^+ f \leq 1$. PER $\int^- f$ FACCIAMO IN ALTRO MODO.

$\forall \varepsilon \in (0, 1)$ PRENDIAMO $P_\varepsilon = \{0, 1+\varepsilon, 2, 3\}$ E SI HA:

$$\lambda(f, P_\varepsilon) = (1+\varepsilon-0) \cdot 0 + (2-(1+\varepsilon)) \cdot 1 + (3-2) \cdot 0 = 1-\varepsilon$$

DI CONSEGUENZA, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ SI HA

$$\int^- f \geq \lambda(f, P_\varepsilon) = 1-\varepsilon$$

VISTA L'ARBITRARIETÀ DI ε , DA CIÒ SEGUE CHE $\int^- f \geq 1$, DOPODI CHÉ SI CONCLUDE COME NEL PUNTO **a**

C STAVOLTA $f(x) = \sin x$ SU $[-1, 1]$ È CRESCENTE E DISPARI.

POSTO:

$$P_n = \left\{ -1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

SI HA:

$$\begin{aligned} \Delta(f, P_n) &= \sum_{i=-n+1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \inf \left\{ f(x) \mid \frac{i-1}{n} \leq x < \frac{i}{n} \right\} = \\ &= \sum_{i=-n+1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i-1}{n}\right) = \end{aligned}$$

GRAZIE AL FATTO CHE f È CRESCENTE

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(f(-1) + \cancel{f\left(-\frac{n-1}{n}\right)} + \dots + \cancel{f\left(-\frac{1}{n}\right)} + \underbrace{f(0)}_{f=0} + \cancel{f\left(\frac{1}{n}\right)} + \dots + \cancel{f\left(\frac{n-1}{n}\right)} \right) =$$

f DISPARI

$$= \frac{1}{n} \cdot f(-1) = -\frac{\sin 1}{n}$$

QUINDI:

$$\begin{aligned} \int^- f &= \sup \left\{ \Delta(f, P) \mid P \text{ PART. DI } [-1, 1] \right\} \geq \\ &\geq \sup \left\{ \Delta(f, P_n) \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} = \\ &= \sup \left\{ -\frac{\sin 1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} = 0 \end{aligned}$$

CIOÈ: $\int^- f \geq 0$.

ANALOGAMENTE SI TROVA: $\int^+ f \leq 0$.

QUINDI:

$$0 \leq \int^- f \leq \int^+ f \leq 0$$

DA CUI SEGUE: $\int^+ f = \int^- f = 0 = \int_{-1}^1 \sin x \, dx$.

P.2 BASTA DIMOSTRARE L'AFFERMAZIONE NEL CASO PARTICOLARE IN CUI $A = \{\bar{x}\}$; IL CASO GENERALE IN CUI A CONTIENE K PUNTI SEGUE APPLICANDO K VOLTE IL CASO PARTICOLARE. SIA DUNQUE $A = \{\bar{x}\}$ E SIA $M > 0$ DEFINITA DA:

$$M = \max \left\{ \sup \{ |f(x)| \mid -1 \leq x \leq 1 \}, |g(\bar{x})| \right\}$$

$\forall \varepsilon > 0$ SIA $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ PART. DI $[-1, 1]$ TALE CHE

ESISTE PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([-1, 1])$

$$(x) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{2}$$

SIA k TALE CHE $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. PASSANDO EVENTUALMENTE AD UNA PARTIZIONE PIÙ FINE POSSIAMO SEMPRE SUPPORRE CHE:

$$(\bullet) \quad x_k - x_{k-1} < \frac{\varepsilon}{4M}$$

RICORDANDO CHE PER $x \neq \bar{x}$ SI HA $g(x) = f(x)$, E USANDO PER g LA STESSA PARTIZIONE P , SI OTTIENE:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \text{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) &= \\ &= (x_k - x_{k-1}) \text{osc}(g, [x_{k-1}, x_k]) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x_i - x_{i-1}) \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \\ &< \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

GRAZIE A (0) → $\frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M$

PERCHÉ $|g| \leq M$ → $\frac{\varepsilon}{2}$

GRAZIE A (x) → $\sum_{i \neq k}^n (x_i - x_{i-1}) \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i])$

ABBIAMO QUINDI MOSTRATO CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists P$ PARTIZIONE DI $[-1, 1]$

TALE CHE

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \text{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

QUINDI $g \in \mathcal{R}([-1, 1])$.

P.3 PROCEDENDO COME NELLO SVOLGIMENTO DEL **P.2(c)**
DELLA LISTA **EXE 1-19/20** SI DIMOSTRA IL SEGUENTE:

TEOREMA DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ E $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA.

SE g È CONTINUA SU TUTTO $[a,b]$ TRANNE AL PIÙ UN
NUMERO FINITO DI PUNTI ALLORA $g \in \mathcal{R}([a,b])$.

PERÒ L'INSIEME DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DELLA
NOSTRA f È:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} \cup \{0\}$$

CHE È INFINITO, E SI ACCUMULA IN 0.

QUINDI NON SI PUÒ APPLICARE IL **TEOREMA** SU TUTTO $[0,1]$.

TUTTAVIA, $\forall c \in (0,1)$ $[c,1] \cap A$ È FINITO, QUINDI SU $[c,1]$
SI PUÒ APPLICARE E CONCLUDERE CHE

$$\forall c \in (0,1) \quad f \in \mathcal{R}([c,1])$$

MOSTRIAMO ORA CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

PER OGNI $\varepsilon > 0$ PRENDIAMO $c = \frac{\varepsilon}{4}$ E $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$

PARTIZIONE DI $[c,1]$ TALE CHE:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} |f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

POSSIAMO FARLO
PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([c,1])$

PRESA ORA $\mathcal{P}' = \{0\} \cup \mathcal{P}$, SI HA CHE $\mathcal{P}'$ È UNA PARTIZIONE
DI $[0,1]$ E INOLTRE:

(•)

$$\begin{aligned} (c-0) \cdot \sup_{t \in [0,c]} |f(t)| + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} |f(t)| &< \\ &< \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

IL FATTO CHE $\forall \epsilon > 0 \exists P'$ PARTIZIONE DI $[0,1]$ TALE CHE VALGA $(*)$, EQUIVALE A DIRE CHE $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

SI NOTI CHE LA NOSTRA ARGOMENTAZIONE PUÒ DIMOSTRARE, PIÙ IN GENERALE, IL SEGUENTE:

TEOREMA DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ED $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA E TALE CHE $\forall c \in (a,b) f \in \mathcal{R}([c,b])$. ALLORA $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

P.4 SI NOTI CHE

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

È UNA PARTIZIONE DI $[0,2]$ SE E SOLO SE

$$P' = \left\{ \frac{x_0}{2}, \frac{x_1}{2}, \dots, \frac{x_n}{2} \right\}$$

È UNA PARTIZIONE DI $[0,1]$.

INOLTRE SI HA:

$$\begin{aligned} S(g, P') &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{2} - \frac{x_{i-1}}{2} \right) \inf \left\{ g(x) \mid \frac{x_{i-1}}{2} \leq x < \frac{x_i}{2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf \left\{ f(2x) \mid x_{i-1} \leq 2x < x_i \right\} = \frac{1}{2} S(f, P) \end{aligned}$$

E, ANALOGAMENTE:

$$S(g, P') = \dots = \frac{1}{2} S(f, P)$$

SICCOME QUESTO VALE PER OGNI PARTIZIONE, ALLORA VALE ANCHE PER $\int^+$ E $\int^-$, QUINDI:

PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([0,1])$

$$\int_{[0,1]}^- g(x) dx = \frac{1}{2} \int_{[0,2]}^- f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{[0,2]}^+ f(x) dx = \int_{[0,1]}^+ g(x) dx \Rightarrow g \in \mathcal{R}([0,1])$$

P.5 TRATTIAMO PRIMA IL CASO IN CUI $f, g > 0$.

SICCOME SONO LIMITATE PRENDIAMO $M > 0$ TALE CHE

$$\forall x \in [a, b] \quad 0 < f(x) < M \text{ E } 0 < g(x) < M$$

PER OGNI $A \subset [a, b]$ VALGONO LE PROPRIETÀ:

$$1) \sup \{ f(x) \cdot g(x) \mid x \in A \} \leq \sup \{ f(x) \mid x \in A \} \cdot \sup \{ g(x) \mid x \in A \}$$

$$2) \inf \{ f(x) \cdot g(x) \mid x \in A \} \geq \inf \{ f(x) \mid x \in A \} \cdot \inf \{ g(x) \mid x \in A \}$$

$$3) \operatorname{osc}(f \cdot g, A) \leq M \operatorname{osc}(f, A) + M \operatorname{osc}(g, A)$$

PER DIMOSTRARE (1) SI OSSERVI CHE $\forall x \in A$ SI HA:

$$f(x) \leq \sup \{ f(x) \mid x \in A \} \text{ E } g(x) \leq \sup \{ g(x) \mid x \in A \}$$

DA CUI SEGUE (ESSENDO TUTTE QUANTITÀ NON NEGATIVE) CHE:

$$\forall x \in A \quad f(x) \cdot g(x) \leq \sup \{ f(x) \mid x \in A \} \cdot \sup \{ g(x) \mid x \in A \}$$

DA CUI SEGUE (1).

LA DIMOSTRAZIONE DI (2) È SIMILE.

DIMOSTRIAMO (3).

PER BREVEITÀ, ANZICHÈ SCRIVERE $\sup \{ f(x) \mid x \in A \}$ SCRIVEREMO S_f E, ANALOGAMENTE $\inf \{ f(x) \mid x \in A \}$ SI SCRIVERÀ I_f . SI HA:

$$\operatorname{osc}(f \cdot g, A) = S_{f \cdot g} - I_{f \cdot g} \leq$$

GRAZIE A (1) E A (2)

$$\leq S_f \cdot S_g - I_f \cdot I_g =$$

$$= S_f \cdot S_g - I_f \cdot S_g + I_f \cdot S_g - I_f \cdot I_g =$$

$$= S_g \cdot (S_f - I_f) + I_f \cdot (S_g - I_g) =$$

$$= S_g \cdot \operatorname{osc}(f, A) + I_f \cdot \operatorname{osc}(g, A) \leq M \cdot \operatorname{osc}(f, A) + M \operatorname{osc}(g, A)$$

ORA, $\forall \varepsilon > 0$ SIA $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ UNA PARTIZIONE DI $[a, b]$ TALE CHE VALGANO SIMULTANEAMENTE LE CONDIZIONI:

$$(A) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

E

$$(B) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

TALE P ESISTE SENZ'ALTRO PERCHÉ, ESSENDO $f \in R([a, b])$, C'È P_1 CHE SODDISFA (A) E, ESSENDO $g \in R([a, b])$, C'È P_2 CHE SODDISFA (B), QUINDI BASTA PRENDERE $P = P_1 \cup P_2$.

UTILIZZANDO TALE P PER $f \cdot g$, SI HA:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f \cdot g, [x_{i-1}, x_i]) &\leq \quad (3) \quad (A) \cup (B) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(M \cdot \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) + M \operatorname{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) \right) = \\ &= M \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) + M \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \operatorname{osc}(g, [x_{i-1}, x_i]) < \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE, NEL CASO PARTICOLARE $f \geq 0$ E $g \geq 0$,
 $\forall \varepsilon > 0 \exists P = \{x_0, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ T.C.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f \cdot g, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

QUINDI $f \cdot g \in R([a, b])$.

NEL CASO GENERALE (f E g DI SEGNO QUALSIASI) PRESO $M > 0$ T.C.

$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| < M$ E $|g(x)| < M$, BASTA OSSERVARE CHE

$$f \cdot g = (f+M)(g+M) - Mf - Mg - M^2$$

E CHE $(f+M) \cdot (g+M)$ RIENTRA NEL CASO PARTICOLARE GIÀ TRATTATO.

INTEGRALE DI RIEMANN

(QUESITI DI TEORIA)

A.A. 22-23

A DIMOSTRARE LE SEGUENTI AFFERMAZIONI (UTILI PER LAVORARE CON LE SOMME DI RIEMANN):

$$1 \quad (A \subset \mathbb{R}, \alpha > 0) \Rightarrow \left(\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A) \quad \text{e} \quad \sup(\alpha A) = \alpha \sup(A) \right)$$

$$2 \quad (A \subset \mathbb{R}, \alpha < 0) \Rightarrow \left(\inf(\alpha A) = \alpha \sup(A) \quad \text{e} \quad \sup(\alpha A) = \alpha \inf(A) \right)$$

$$3 \quad (A \subset B \subset \mathbb{R}) \Rightarrow \left(\inf(A) \geq \inf(B) \quad \text{e} \quad \sup(A) \leq \sup(B) \right)$$

$$4 \quad (f, g: A \rightarrow \mathbb{R}) \Rightarrow \left(\begin{aligned} \inf \{ f(x) + g(x) \mid x \in A \} &\geq \inf \{ f(x) \mid x \in A \} + \inf \{ g(x) \mid x \in A \} \\ \sup \{ f(x) + g(x) \mid x \in A \} &\leq \sup \{ f(x) \mid x \in A \} + \sup \{ g(x) \mid x \in A \} \end{aligned} \right)$$

B RISPONDERE AI SEGUENTI QUESITI, MOTIVANDO LA RISPOSTA.

5 SIA $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA E TALE CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists g, h \in \mathcal{R}([a, b])$ TALI CHE $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ E $\int_a^b h(x) - g(x) dx < \varepsilon$. MOSTRARE CHE $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

6 SIA $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ TALE CHE $\forall \varepsilon > 0 \quad \max(f, \varepsilon) \in \mathcal{R}([a, b])$.
MOSTRARE CHE $f \in \mathcal{R}([a, b])$

7 MOSTRARE CHE SE $f \in \mathcal{R}([a, b])$ ALLORA $\sqrt{|f|} \in \mathcal{R}([a, b])$.

8 DATA $f \in C([a, b])$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ DEFINIAMO $G_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)\right)$
MOSTRARE CHE:

a $G_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

b SE $f \in C^1([a, b])$ ALLORA $G_n - \int_a^b f(x) dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$

c SE $f \in C^2([a, b])$ ALLORA $G_n - \int_a^b f(x) dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

9 DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE ESISTE $f \in \mathcal{R}([a, b])$
CON UN INSIEME PIÙ CHE NUMERABILE DI PUNTI DI
DISCONTINUITÀ.

10 DATA $f \in \mathcal{R}([a, b])$ DIRE, MOTIVANDO LA RISPOSTA, SE È VERO CHE:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ T.C. $\forall \mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$

$$\max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, n\} \leq \delta \Rightarrow S(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

Analisi Matematica (II modulo) - Exe. 3

Titolo nota

25 marzo 2020 (14.00-16.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRALE DI RIEMANN (ALTRI QUESITI)

NOTA ALCUNI PROBLEMI HANNO UN ASTERISCO: SIGNIFICA CHE SONO UN PÒ PIÙ DIFFICILI DEL QUESITO MEDIO CHE POTREI DARE ALL'ESAME.

1 DATA $f \in C([a, b])$, QUALI DELLE SEGUENTI CONDIZIONI BASTA DA SOLA A GARANTIRE CHE f È IDENTICAMENTE NULLA?

(a) $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = 0$

(b) $\forall q_1, q_2 \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \quad \int_{q_1}^{q_2} f(x) dx = 0$

(c) $\int_a^b |f(x)| dx = 0$

(d) $\forall c \in [a, b] \quad \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$

(*) 2 DATA $f \in C([a, b])$ CONVESSA, MOSTRARE CHE:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(*) 3 (a) MOSTRARE CHE SE $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ È DEL TIPO $f(x) = \chi_I(x)$, CON I INTERVALLO, E $\varphi \in C^1([a, b])$ È STRETTAMENTE CRESCENTE, CON $\varphi(a) = a$ E $\varphi(b) = b$, ALLORA SI HA:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

(b) COME (a) MA CON f FUNZIONE SEMPLICE.

(c) COME (a) MA CON IPOTESI PIÙ DEBOLI POSSIBILE SU f .

- 4 COSTRUIRE $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, CRESCENTE E DI CLASSE C^∞ TALE CHE
 $F(x) = 0$ PER $x \leq -1$ E $F(x) = 1$ PER $x \geq 1$.
(SUGGERIMENTO: DEFINIRE $F(x)$ COME FUNZIONE INTEGRALE)
-

- 5 PER CIASCUNA DELLE $F(x)$ ELENCAE SOTTO DIRE QUANTE SONO
LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE: $F(x) = 100$.

(a) $F(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$ (CON $x \in \mathbb{R}$)

(b) $F(x) = \int_0^x e^{-t^4} dt$ (CON $x \in \mathbb{R}$)

(c) $F(x) = \int_x^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ (CON $x \in (0, 1)$)

(d) $F(x) = \int_0^x \sin \sqrt[10]{t} dt$ (CON $x > 0$)

- 6 QUALI DELLE SEGUENTI $F(x)$, CHE SONO DEFINITE SU TUTTO $\mathbb{R}$, SONO PERIODICHE?

(a) $F(x) = \int_0^x \sin^9 t dt$ (b) $F(x) = \int_0^x \sin^8 t dt$ (c) $F(x) = \int_x^{x+1} \sin^8 t dt$

(d) $F(x) = \int_0^x \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2} \right) dt$ (e) $F(x) = \int_0^x \cos(\cos t) dt$ (f) $F(x) = \int_0^x \sin(\sin t) dt$

- 7 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ DEFINIAMO $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{\cos t}}{1+t^2} dt$. (a) DIRE SE $\exists$ FINITO $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

(b) TROVARE $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

(c) DIRE SE $F(x)$ HA PUNTI DI MAX. REL.

- 8 PER OGNI $x > 0$ DEFINIAMO $F(x) = \int_{\ln x}^{\ln(1+x)} \frac{1}{\sqrt[3]{1+e^{3t}}} dt$
TROVARE INF E SUP DI $F(x)$.
-