INTEGRALI IMPROPRI

ESERCIZI

(CON RISULTATO)

INDICE PROVVISORIO:

Analisi Matematica 1- Lista n. 25

Calcolo di Integrali Impropri

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Calcolare i seguenti integrali impropri:

1) $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$

2) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx = 6$

3) $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x(\sqrt{2}+\ln x)} \, dx = +\infty$

4) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{\pi}{2} + \ln 2$

5) $\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt[3]{x}} \, dx = 6$

6) $\int_{-1}^0 \ln\left(\frac{1}{x^8}\right) dx = 8$

7) $\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin x \ln(\cos x) \, dx = 1$

8) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\pi \arctan x}} \, dx = \sqrt{2}$

9) $\int_{81}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}} \, dx = 2\ln 2$

10) $\int_e^{+\infty} \frac{e^{\frac{2x+e}{x}}}{x^2} \, dx = e^2 - e$

11) $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{x^2 \cos\left(\frac{\pi}{6x}\right)} \, dx = 3\ln 3$

12) $\int_{-2}^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt[8]{4-x^2}}\right) dx = 1 - 2\ln 2$

Rispondere, motivando la risposta, alle seguenti domande:

13) Dopo aver calcolato i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{3n} \frac{1}{x} dx \stackrel{}{=} \ln 3$, (b) $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n^2} \frac{1}{x} dx = +\infty$ e (c) $\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n+\sqrt{n}} \frac{1}{x} dx = 0$; trovare (a_n) e (b_n) che tendano a $+\infty$ e tali che:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x} \, dx = 51$$

[BASTA CHE $\frac{b_n}{a_n} \to e^{51}$

AD ESEMPIO: $\begin{cases} a_n = n \\ b_n = e^{51} \cdot n \end{cases}$

14) Cosa succede nel problema (13) se la funzione integranda è $\frac{1}{x^2}$ invece che $\frac{1}{x}$?

[RISPOSTA: SUCCEDE CHE, COMUNQUE SI PRENDANO (a_n) E (b_n) TALI CHE $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$, SI HA $\int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^2} dx \to 0$]

15) Dire quali sono le $f \in C([0,+\infty))$ tali che, comunque si prende $\lambda \in \mathbb{R}$, è sempre possibile trovare due successioni (a_n) e (b_n) che tendano a $+\infty$ e tali che $\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx = \lambda$.

[RISPOSTA: SONO TUTTE E SOLE QUELLE $f(x)$ CHE HANNO UNA PRIMITIVA $F(x)$ NON LIMITATA]

Analisi Matematica 1- Lista n. 26

Studio della Convergenza di Integrali Impropri

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{100}{1+x^2}\right)^x dx$ $\boxed{\text{converge}}$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\sqrt{x}\, dx$ $\boxed{\text{indeterminato}}$

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x dx$ $\boxed{\text{diverge}}$

4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^2} dx$ $\boxed{\text{converge}}$

5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x-\cos x}{\tan x-\sin x}\, dx$ $\boxed{\text{diverge}}$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+x^x)}\, dx$ $\boxed{\text{diverge}}$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+x^{-x}\right) dx$ $\boxed{\text{converge}}$

8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^2+5x+8}{x^6-1}\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^2+5x+8}{x^6-1}\, dx$ $\boxed{\text{diverge}}$

10) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\sin\left(\sin\frac{1}{x}\right)}{\ln(\ln x)}\, dx$ $\boxed{\text{diverge}}$

11) $\displaystyle\int_0^{1} \left|\ln\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)+\ln^{-1}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)\right|^{-\frac{1}{2}} dx$ $\boxed{\text{converge}}$

12) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x - e^{\frac{1}{x}}\right) dx$ $\boxed{\text{converge}}$

13) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln(1+x)\ln^2(\ln(2+x))}\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

14) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x\sqrt{x}}\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

15) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{100\sin x+\ln(\ln x)}{\sqrt{1+x^2}\cdot\left(\ln^2 x+\sin(x^2)\right)}\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

16) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

17) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln(3+x)}\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

18) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x+\sin\frac{1}{x}}{\ln(2+x)}\, dx$ $\boxed{\text{diverge}}$

19) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(\sin x)|^x\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

20) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{15+\sin x}{17+\cos x}\right)^x dx$ $\boxed{\text{converge}}$

21) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{16+\sin x}{17+\cos x}\right)^x dx$ $\boxed{\text{diverge}}$

22) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin(x^4)\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

23) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin x|^{x^3}\, dx$ $\boxed{\text{converge}}$

24) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin x|^{x^2}\, dx$ $\boxed{\text{diverge}}$

Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri al variare dei valori dei parametri a fianco indicati e, se richiesto, calcolarli per particolari valori del parametro.

25) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^\alpha}\,dx$ Studiare per $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare per $\alpha = 2$.
[Converge per $\alpha > 1$; per $\alpha = 2$ vale $\frac{\pi^2}{8}$]

26) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{x^\alpha}\,dx$ Studiare per $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare per $\alpha = \frac{3}{2}$
[Converge per $\alpha > 1$; per $\alpha = \frac{3}{2}$ vale $\frac{\pi}{2} + \ln 2$]

27) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x}}{x^\alpha}\,dx$ Studiare per $\alpha \in \mathbb{R}$ [Converge per $1 < \alpha < \frac{3}{2}$]

28) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{|x-1|^\alpha}\,dx$ Studiare per $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare per $\alpha = \frac{3}{2}$
[Converge per $\alpha < 2$; per $\alpha = \frac{3}{2}$ vale $-4\ln 2$]

29) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\ln(x^\alpha)}{(x-1)^\alpha}\,dx$ Studiare per $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare per $\alpha = \frac{3}{2}$
[Converge per $\alpha < 2$; per $\alpha = \frac{3}{2}$ vale $-3\ln 2 + \frac{3}{2}\pi$]

30) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4x^{\frac{\alpha}{4}} + x^{\frac{5}{\alpha}}}\,dx$ Studiare per $\alpha > 0$, calcolare per $\alpha = 2$.
[Converge per $0 < \alpha < 4$ e per $\alpha > 5$; per $\alpha = 2$ vale $\frac{\pi}{4}$]

31) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x - \arctan x}{|x|^\alpha}\,dx$ Studiare per $\alpha > 0$, calcolare per $\alpha = \frac{7}{2}$.
[Converge per $1 < \alpha < 4$; per $\alpha = \frac{7}{2}$ vale 0]

32) $\displaystyle\int_{e^e}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta (\ln(\ln x))^\gamma}\,dx$ Studiare per $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, calcolare per $\boxed{\alpha = \beta = 1,\ \gamma = 2}$
[Converge nei seguenti 3 casi $\begin{cases} 1)\ \alpha > 1,\ \beta \text{ e } \gamma \text{ qualsiasi} \\ 2)\ \alpha = 1,\ \beta > 1,\ \gamma \text{ qualsiasi} \\ 3)\ \alpha = \beta = 1,\ \gamma > 1 \end{cases}$ NEL CASO RICHIESTO VALE 1]

33) $\displaystyle\int_{2\alpha}^{+\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)^{x \ln x} dx$ Studiare per $\alpha > 0$. [Converge per $\alpha > 1$]

34) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ Studiare per $\alpha > 0$. [Converge per $\alpha > 0$]

35) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\,dx$ Studiare per $\alpha \in \mathbb{R}$. [Converge per $|\alpha| > 1$]

36) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\sin \sqrt{x}\right|^{x^\alpha} dx$ Studiare per $\alpha > 0$ [Converge per $\alpha > 2$]

Analisi Matematica 1- Lista n. 28

Titolo nota

Studio della Funzione Integrale

www.problemisvolti.it

1) Studiare la funzione $F(x)=\int_1^x \sqrt[4]{1+\frac{1}{t^3}}\,dt$; in particolare:

a) dire per quali x è definita;

b) stabilire l'esistenza di eventuali asintoti;

c) determinarne la monotonia ed eventuali punti di estremo;

d) studiarne la convessità e determinare eventuali flessi.

2) Studiare la funzione $F(x)=\int_0^x \frac{e^{t^3}}{1+e^{2t^3}}\,dt$.

Rispondere alle stesse domande di (1) e, in aggiunta determinare eventuali simmetrie del grafico.

3) Studiare la funzione $F(x)=\int_0^x \ln\left(\frac{1}{e}+e^t\right)dt$.

Rispondere alle stesse domande di (1) e, in aggiunta determinare l'ordine di infinito di $F(x)$ per $x\to+\infty$.

4) Studiare la funzione $F(x)=\int_0^x \arctan\frac{1}{t^3-t}\,dt$.

Rispondere alle stesse domande di (2) e, in aggiunta determinare eventuali punti angolosi del grafico

5) Studiare la funzione $F(x)=\int_2^x \frac{\ln|t-1|}{t^2\cdot\sqrt{|\ln t|}}\,dt$.

Rispondere alle stesse domande di (1) accontentandosi però di studiare concavità e convessità in modo sommario, senza uno studio dettagliato del segno di F''. In aggiunta, però, trovare il valore esatto del minimo assoluto di $F(x)$.

Università degli Studi di Roma Tor Vergata

Analisi Matematica 2

Prof. Emanuele Callegari, Prof. Vincenzo Morinelli

Corso di Laurea in Matematica

17 Marzo 2023

1. Calcolare
$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$
Sia $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$ dimostrare che
$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left((2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right)$$

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

(2.a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$

(2.b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

(2.c) $\displaystyle\int \frac{2-\sin^2 x}{\sin 2x}dx$

(2.d) $\displaystyle\int \frac{1+2\cos^2 x}{1+2\sin^2 x}dx$

(2.e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$

(2.f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x + \cos^2 x}$

3. Calcolare i seguenti integrali impropri

(3.a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})}dx$

(3.b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}(x+\sqrt{e^x-1})dx$

(3.c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}dx$

(3.d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$. *Sugg.* Ricondursi a $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

(3.e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}dx$