SERIE NUMERICHE

ESERCIZI

(CON RISULTATI E ALCUNI SVOLGIMENTI)

INDICE PROVVISORIO:

Analisi Matematica 1- Lista n. 29

Calcolo della somma di semplici Serie

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Calcolare la somma delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{90}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{100^n} = \frac{1}{11}$

3) $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n+1}{3^n} = \frac{1}{36}$

4) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2^n}} = -\frac{1}{2}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

7) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - \frac{65}{24}$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\frac{1}{e}$

9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2}{n!} = 4e$

10) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n+1}{n!} = e^2+e-\frac{15}{2}$

11) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-3)\cdot 5^n+2}{(n+1)!} = \frac{e^5}{5}+2e+\frac{19}{5}$

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{5^n} = -\frac{9}{32}$

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5-5n^3+4n}{3^n} = \frac{135}{4}$

15) Trovare la frazione corrispondente a $0,0\overline{1}$ usando la serie (1)

16) Trovare la frazione corrispondente a $0,\overline{09}$ usando la serie (2)

Scrivere la serie corrispondente ai seguenti numeri periodici e calcolarla:

17) $0,32\overline{5} = 0,32+\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{5}{10^n} = \frac{293}{900}$

18) $0,3\overline{25} = 0,3+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{25}{10\cdot 100^n} = \frac{161}{495}$

19) $0,3\overline{250} = 0,3+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{250}{10\cdot 1000^n} = \frac{3247}{9990}$

20) Scrivere in base 10 il numero la cui rappresentazione in base 2 è $11,\overline{0011}$. $= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{16^n} = 3,2$

Analisi Matematica 1- Lista n. 30

Titolo nota

Studio del carattere di Serie a Termini Positivi

www.problemisvolti.it

Studiare il carattere delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4+1}$ CONVERGE

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$ CONVERGE

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{n^2+n^4}$ DIVERGE

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ DIVERGE

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$ CONVERGE

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ CONVERGE

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{\sin n}}{1+n^2}$ CONVERGE

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ CONVERGE

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\cos n}}{n}$ DIVERGE

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{n}}$ CONVERGE

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)\cdot\sqrt{\ln(1+n^4)}}$ DIVERGE

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot\ln^2(1+\sqrt{n})}$ CONVERGE

13) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ CONVERGE

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{n^{4n}}$ CONVERGE

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}$ CONVERGE

16) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$ CONVERGE

17) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ DIVERGE

18) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ CONVERGE

19) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$ CONVERGE

20) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ DIVERGE

21) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} n^{-1-\frac{1}{\ln(\ln n)}}$ CONVERGE

22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt[n]{n}}$ DIVERGE

23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\cos n)}{n\cdot\ln n}$ DIVERGE

24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(\sin n))^n$ CONVERGE

25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt[4]{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ DIVERGE

26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ DIVERGE

27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(\sqrt{n})^{n}}$ CONVERGE

28) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{2}}}$ CONVERGE

29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)!}{n^{n^{n}}}$ CONVERGE

30) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^{n!}}{(n^{n})!}$ CONVERGE

31) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\cos n}{n}$ DIVERGE

32) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ CONVERGE

33) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{k}}\right)$ CONVERGE

34) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{2}}\right)$ DIVERGE

Studiare, al variare del parametro reale $a>0$, il carattere delle seguenti serie:

35) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{a}$ CONVERGE PER $a>\frac{1}{2}$

36) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n^{a})\right)$ CONVERGE PER $a>1$

37) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{a}{n}\right)$ CONVERGE PER $a=\frac{1}{12}$

38) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\left(\sin\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)-1+\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{a}{n}\right)$ CONVERGE PER $a=\frac{5}{24}$

39) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$ CONVERGE PER $a>e$

40) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{\log_{2^{n}}4}{\log_{4}n^{n}}\right)^{a}$ CONVERGE PER $a>\frac{1}{2}$

41) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^{3}}\right)^{n^{a}}$ CONVERGE PER $a>3$

42) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^{n}}a^{n}$ CONVERGE PER $0<a<e$

43) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot(\ln(\ln n))^{a}}$ CONVERGE PER $a>1$

44) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{a}$ CONVERGE PER $a>1$

45) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)^{a}$ CONVERGE PER $a>0$

46) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^{a}}}$ CONVERGE PER $a>1$

47) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2}}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{an\ln n}$ CONVERGE PER $0<a<1$

48) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^{2}+n-1}{n^{2}+3n+5}\right)^{n^{a}}$ CONVERGE PER $a>1$

49) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\cdot n^{n+1}}{(2n)!}a^{n}$ CONVERGE PER $0<a<\frac{4}{e}$

50) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}a^{n}$ CONVERGE PER $0<a<\frac{4}{e^{2}}$

Analisi Matematica 1- Lista n. 31

Studio del carattere di Serie a Termini di segno qualsiasi

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Studiare convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\frac{1}{n}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\ln n}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+\sin n}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n + e^{-n}}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi n + \frac{1}{n^2}\right)$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: SI

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n\ln n + 1}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$ — SEMPLICE: NO — ASSOLUTA: NO

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}\right)$ — SEMPLICE: NO — ASSOLUTA: NO

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n n}$ — SEMPLICE: NO — ASSOLUTA: NO

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi n^2 + \frac{1}{n}\right)$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\cdot n! + \frac{1}{n}\right)$ — SEMPLICE: NO — ASSOLUTA: NO

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}\right)}{n^{2+(-1)^n}}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin n}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

17) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+2\cdot(-1)^n}{n^2+1}\right)$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: SI

18) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+2\cdot(-1)^n}{n+1}\right)$ — SEMPLICE: NO — ASSOLUTA: NO

19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\left(e^{-\frac{2}{\sqrt{n}}} - \cos\frac{2}{\sqrt[4]{n}}\right)$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\cdot\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{n}}\right)$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\left(2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} - 2\cdot\cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ln\left(1-\frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\cdot e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}} - 2\cdot\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} + \ln\left(1-2\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\cdot\log_8 n)}{n}$ — SEMPLICE: NO — ASSOLUTA: NO

24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ — SEMPLICE: SI — ASSOLUTA: NO

Studiare, al variare di $a>0$, convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \arctan\frac{1}{n}\right)^a$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>0$, ASSOLUTA PER $a>\frac{1}{3}$

26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>0$, ASSOLUTA PER $a>1$

27) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot(\ln n)^a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>0$, ASSOLUTA PER $a>1$

28) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{an}}{n^n \ln n}$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $0<a\leq 1$, ASSOLUTA PER $0<a<1$

29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{an} \sin\frac{1}{(n+100)!}$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $0<a<1$, ASSOLUTA PER $0<a<1$

30) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(-1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot n^a}$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>\frac{1}{2}$, ASSOLUTA PER $a>1$

31) $\displaystyle\sum_{n=\lfloor a\rfloor+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a\sin n}$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>0$, ASSOLUTA MAI

32) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^a}}-1\right)$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>\frac{1}{2}$, ASSOLUTA PER $a>1$

33) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a+\cos(n\pi)}$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>\frac{1}{2}$, ASSOLUTA PER $a>1$

34) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a+\cos n}$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>0$, ASSOLUTA PER $a>1$

Data $f(x)=2\arctan x+\ln(1-2x)+2x^2$, studiare, al variare di $a>0$, convergenza semplice e assoluta delle serie:

35) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n^a}\right)$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>0$, ASSOLUTA PER $a>\frac{1}{3}$

36) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>\frac{1}{4}$, ASSOLUTA PER $a>\frac{1}{3}$

Data $f(x)=\sin(2x)+2\ln(1-x)+x^2$, studiare, al variare di $a>0$, convergenza semplice e assoluta delle serie:

37) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n^a}\right)$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>0$, ASSOLUTA PER $a>\frac{1}{3}$

38) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ CONVERGENZA SEMPLICE PER $a>\frac{1}{4}$, ASSOLUTA PER $a>\frac{1}{3}$

Per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ definiamo
$$a_n=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt[6]{n}} & \text{se } n \text{ è un quadrato perfetto}\\[2ex] -\dfrac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^{\frac{4}{3}}} & \text{altrimenti}\end{cases}$$
studiare convergenza semplice e assoluta di:

39) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ CONVERGE

40) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ DIVERGE A $+\infty$

41) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^3$ DIVERGE A $+\infty$

42) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan(a_n)$ DIVERGE A $-\infty$

Serie

lista **E7**

36 problemi assegnati nelle prove d'esame

Nota. Segnaleremo con un pallino nero ($^\bullet$) tutte le volte che del quesito sia disponibile il video con lo svolgimento.

A.A. 2014/2015

1. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **A**] Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $\alpha = 2$ e per $\alpha = 1$.

2. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **B**] Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $\alpha = 1$ e per $\alpha = 0$.

3. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **C**] Data la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln^\alpha n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $\alpha = 2$ e per $\alpha = 1$.

4. [2 Febbraio 2015 - **II Esonero** - fila **D**] Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $\alpha = 2$ e per $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

5. [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **A**]

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, convergenza semplice ed assoluta della serie: $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

6. [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **B**]

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, convergenza semplice ed assoluta della serie: $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

7. [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **C**]

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, convergenza semplice ed assoluta della serie: $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha$.

8. [6 Febbraio 2015 - **I Appello Invernale** - fila **D**]

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, convergenza semplice ed assoluta della serie: $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

9. [19 Febbraio 2015 - **II Appello Invernale** - fila **A**]

Sia data la serie: $\displaystyle\sum_{n=50}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{10n - \alpha\cos n}$. Studiarne la convergenza semplice nei casi $\alpha = 1$, $\alpha = 10$ e $\alpha = 200$.

10. [19 Febbraio 2015 - **II Appello Invernale** - fila **B**]

Sia data la serie: $\displaystyle\sum_{n=50}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{20n - \alpha\sin n}$. Studiarne la convergenza semplice nei casi $\alpha = 1$, $\alpha = 20$ e $\alpha = 200$.

11. [19 Febbraio 2015 - **II Appello Invernale** - fila **C**]

Sia data la serie: $\displaystyle\sum_{n=50}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 10\sin n}$. Studiarne la convergenza semplice nei casi $\alpha = 200$, $\alpha = 10$ e $\alpha = 1$.

12. [19 Febbraio 2015 - **II Appello Invernale** - fila **D**]

Sia data la serie: $\displaystyle\sum_{n=50}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 20\cos n}$. Studiarne la convergenza semplice nei casi $\alpha = 200$, $\alpha = 20$ e $\alpha = 1$.

13. [7 Luglio 2015 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Sia data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha + |\sin n| + |\cos n|)^n}$, dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbf{R}$. Studiarne il carattere nei casi: $\alpha = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ e infine (facoltativo) $\alpha = -\frac{1}{100}$.

14. [17 Luglio 2015 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Sia data la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^{\alpha n}}{n^{n+1}}$, dipendente da un parametro $\alpha > 0$. Studiarne, al variare di α, la convergenza semplice ed assoluta.

15. [7 Settembre 2015 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Sia data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 3(-1)^n n^\alpha}$. Studiarne la convergenza semplice e assoluta nei casi $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ e infine (facoltativo) $\alpha = \frac{1}{2}$.

16. [22 Settembre 2015 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Sia data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{\alpha n} \sin \frac{1}{(n+2)!}$. Studiarne la convergenza semplice e assoluta nei casi $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

A.A. 2016/2017

17. [26 Gennaio 2017 - **II Esonero** - fila **A**] Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{(An)^{n+1} \ln(1+2n)}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $A = 2$, $A = \frac{1}{2}$ e $A = 1$.

18. [26 Gennaio 2017 - **II Esonero** - fila **B**] Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n A^n}{n^{n+1} \ln(1+n^2)}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $A = 2$, $A = \frac{1}{2}$ e $A = 1$.

19. [26 Gennaio 2017 - **II Esonero** - fila **C**] Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-A)^n (n+1)^n}{n^{n+1} \sqrt{\ln(1+n)}}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $A = 2$, $A = \frac{1}{2}$ e $A = 1$.

20. [26 Gennaio 2017 - **II Esonero** - fila **D**] Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^n}{n^{n+1}\sqrt{A^n}\ln(1+\sqrt{n})}$, studiarne convergenza semplice e assoluta per $A=4$, $A=\frac{1}{4}$ e $A=1$.

21. [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - fila **A**] Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^\alpha(1+e^{2n})+\sin n}$,

(**a**) studiarne la convergenza assoluta al variare di $\alpha>0$;

(**b**) studiarne la convergenza semplice per $\alpha=1$.

22. [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - fila **B**] Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+(2n)^\alpha}+\sin n}$,

(**a**) studiarne la convergenza assoluta al variare di $\alpha>0$;

(**b**) studiarne la convergenza semplice per $\alpha=2$.

23. [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - fila **C**] Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\sqrt{n})^\alpha+\sin n}$,

(**a**) studiarne la convergenza assoluta al variare di $\alpha>0$;

(**b**) studiarne la convergenza semplice per $\alpha=2$.

24. [7 Febbraio 2017 - **I Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - fila **D**] Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+(2n)^2)^\alpha+\sin n}$,

(**a**) studiarne la convergenza assoluta al variare di $\alpha>0$;

(**b**) studiarne la convergenza semplice per $\alpha=\frac{1}{2}$.

25. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - fila **A**] Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{10n^\alpha+\sin n^{3\alpha}}$,

(**a**) studiarne la convergenza per $\alpha=2$;

(**b**) studiarne la convergenza per $\alpha=1$;

(**c**) (facoltativo) studiarne la convergenza per $\alpha=\frac{2}{3}$.

26. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - fila **B**] Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{8n^\alpha+\cos n^{3\alpha+1}}$,

(**a**) studiarne la convergenza per $\alpha=2$;

(**b**) studiarne la convergenza per $\alpha=1$;

(**c**) (facoltativo) studiarne la convergenza per $\alpha=\frac{2}{3}$.

27. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - fila **C**] Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n^\alpha+\cos(\pi n)}$,

(**a**) studiarne la convergenza per $\alpha=2$;

(**b**) studiarne la convergenza per $\alpha=1$;

(**c**) (facoltativo) studiarne la convergenza per $\alpha=\frac{1}{2}$.

28. [22 Febbraio 2017 - **II Appello Inv.** e **Recupero II Eso.** - fila **D**] Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\alpha+1)n^\alpha - \cos(\pi n)}$,

(**a**) studiarne la convergenza per $\alpha = 2$;

(**b**) studiarne la convergenza per $\alpha = 1$;

(**c**) (facoltativo) studiarne la convergenza per $\alpha = \frac{1}{2}$.

29. •[4 Luglio 2017 - **I Appello Estivo** - fila **A**] Studiare, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza della serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n+1)!)^\alpha}{n^{n-1}}$.

30. [4 Luglio 2017 - **I Appello Estivo** - fila **B**] Studiare, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza della serie: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+2)!}{(n-1)^{\alpha n}}$.

31. [19 Luglio 2017 - **II Appello Estivo** - fila **A**] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, convergenza semplice e assoluta della serie: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^\alpha((n+3)!)}$.

32. [19 Luglio 2017 - **II Appello Estivo** - fila **B**] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, convergenza semplice e assoluta della serie: $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n((n+1)^\alpha - n^\alpha)$.

33. [1 Settembre 2017 - **I Appello Autunnale** - fila **A**] Data $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \ln n$, dire se convergono le serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^3$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

34. [1 Settembre 2017 - **I Appello Autunnale** - fila **B**] Data $a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \arctan n$, dire se convergono le serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^3$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

35. [15 Settembre 2017 - **II Appello Autunnale** - fila **A**] Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{(4^n - 3^n \sin n)\sqrt{n}}$, studiarne la convergenza per $\alpha = 3$, $\alpha = 5$, $\alpha = 4$ e $\alpha = -4$.

36. [15 Settembre 2017 - **II Appello Autunnale** - fila **B**] Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{(3^n + 2^n \cos n)\sqrt{n}}$, studiarne la convergenza per $\alpha = 2$, $\alpha = 4$, $\alpha = 3$ e $\alpha = -3$.

Risposte lista E7 - Serie

Nota. [15 settembre 2017] I seguenti risultati sono già stati ricontrollati, se tuttavia ci fosse ancora qualche errore, vi sarò grato se me lo segnalerete all'indirizzo: `callegar@mat.uniroma2.it`

1. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ converge solo semplicemente.

2. Per $\alpha = 1$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 0$ converge solo semplicemente.

3. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ converge solo semplicemente.

4. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = \frac{1}{2}$ converge solo semplicemente.

5. Per $\alpha \leq 0$ non converge, per $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ converge solo semplicemente, per $\alpha > \frac{1}{3}$ converge anche assolutamente.

6. Per $\alpha \leq 0$ non converge, per $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ converge solo semplicemente, per $\alpha > \frac{1}{3}$ converge anche assolutamente.

7. Per $\alpha \leq 0$ non converge, per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ converge solo semplicemente, per $\alpha > \frac{1}{2}$ converge anche assolutamente.

8. Per $\alpha \leq 0$ non converge, per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ converge solo semplicemente, per $\alpha > \frac{1}{2}$ converge anche assolutamente.

9. Converge semplicemente sia per $\alpha = 1$ che per $\alpha = 10$ che per $\alpha = 200$.

10. Converge semplicemente sia per $\alpha = 1$ che per $\alpha = 20$ che per $\alpha = 200$.

11. Converge semplicemente sia per $\alpha = 200$ che per $\alpha = 10$ che per $\alpha = 1$.

12. Converge semplicemente sia per $\alpha = 200$ che per $\alpha = 20$ che per $\alpha = 1$.

13. Converge per $\alpha = \frac{3}{2}$ e per $\alpha = \frac{1}{2}$, diverge a $+\infty$ per $\alpha = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ e per $\alpha = -\frac{1}{100}$.

14. Per $\alpha > 1$ non converge, per $\alpha = 1$ converge solo semplicemente, per $0 < \alpha < 1$ converge anche assolutamente.

15. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ solo semplicemente, per $\alpha = \frac{1}{2}$ diverge a $-\infty$.

16. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ e per $\alpha = \frac{1}{2}$ non converge.

17. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = \frac{1}{2}$ non converge, per $\alpha = 1$ converge solo semplicemente.

18. Per $\alpha = 2$ non converge, per $\alpha = \frac{1}{2}$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ converge solo semplicemente.

19. Per $\alpha = 2$ non converge, per $\alpha = \frac{1}{2}$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ converge solo semplicemente.

20. Per $\alpha = 4$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = \frac{1}{4}$ non converge, per $\alpha = 1$ converge solo semplicemente.

21. Converge assolutamente se e solo se $\alpha > 1$, per $\alpha = 1$ converge semplicemente.

22. Converge assolutamente se e solo se $\alpha > 2$, per $\alpha = 2$ converge semplicemente.

23. Converge assolutamente se e solo se $\alpha > 2$, per $\alpha = 2$ converge semplicemente.

24. Converge assolutamente se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$, per $\alpha = \frac{1}{2}$, converge semplicemente.

25. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ e $\alpha = \frac{2}{3}$ solo semplicemente.

26. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ e $\alpha = \frac{2}{3}$ solo semplicemente.

27. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ solo semplicemente, per $\alpha = \frac{1}{2}$ diverge a $-\infty$.

28. Per $\alpha = 2$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $\alpha = 1$ solo semplicemente, per $\alpha = \frac{1}{2}$ diverge a $+\infty$.

29. Per $0 < \alpha \leq 1$ converge, per $\alpha > 1$ diverge.

30. Per $0 < \alpha < 1$ diverge, per $\alpha \geq 1$ converge.

31. La risposta corretta è: per $\alpha \leq 0$ non converge, per $0 < \alpha \leq 1$ converge solo semplicemente mentre per $\alpha > 1$ converge sia semplicemente che assolutamente.

32. La risposta corretta è: per $\alpha \leq 0$ converge sia assolutamente che semplicemente, per $0 < \alpha < 1$ converge solo semplicemente mentre per $\alpha \geq 1$ non converge.

33. La risposta corretta è: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^3$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ convergono.

34. La risposta corretta è: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^3$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ convergono.

35. La risposta corretta è: converge per $\alpha = 3$ e per $\alpha = -4$ mentre diverge per $\alpha = 5$ e per $\alpha = 4$.

36. La risposta corretta è: converge per $\alpha = 2$ e per $\alpha = -3$ mentre diverge per $\alpha = 4$ e per $\alpha = 3$.

Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 3

Titolo nota

Prova simulata su: Serie - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

1 DETERMINARE IL CARATTERE DI $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot \ln(1+n^4)}{n^{n+1}}$.

2 STUDIARE IL CARATTERE DI $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} A^n$ AL VARIARE DI $A>0$.

3 DETERMINARE IL CARATTERE DI $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) + (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

4 DATA $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha + \sin(3n)}$, STUDIARNE IL CARATTERE NEI CASI:

- **a** $\alpha = 2$
- **b** $\alpha = 1$
- **c** $\alpha = \frac{2}{3}$
- FACOLTATIVO → **d** $\alpha = \frac{1}{2}$

ESIBENDO UN CONTROESEMPIO

5 DATA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $\mathbb{R}$, DIMOSTRARE O CONFUTARE LE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

- **a** $\sum a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow$ $\sum a_n^2$ CONVERGE
- **b** $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n^2$ CONVERGE
- **c** $\sum n a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE
- FACOLTATIVO → **d** $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n^3$ CONVERGE

ISTRUZIONI AL RIENTRO DALLE VACANZE PASQUALI VERRANNO MOSTRATI IN AULA GLI SVOLGIMENTI DEI QUESITI DI QUESTA PROVA SIMULATA. CHI VOLESSE METTERSI ALLA PROVA PUÒ DIVERTIRSI A SVOLGERLA DA SOLO E MANDARMI L'ELABORATO. FARÒ UNA CORREZIONE DI MASSIMA E GLI FARÒ SAPERE CHE VOTO AVREBBE PRESO.

CHI VUOLE PARTECIPARE MI MANDI FOTO O SCANNERIZZAZIONE DELL'ELABORATO COME ALLEGATO DI UN MESSAGGIO SU TEAMS **ENTRO LE 19:00 DI MARTEDÌ 14 APRILE.**

BUON DIVERTIMENTO!

Analisi Matematica (II modulo)- Sim. 3

Titolo nota

Prova simulata su: Serie - docente: Prof. **E. Callegari** - Univ. di Roma ***Tor Vergata***

SOLUZIONI

1 DETERMINARE IL CARATTERE DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot \ln(1+n^4)}{n^{n+1}}$.

SVOLGIMENTO

POSTO $a_n = \frac{n! \cdot \ln(1+n^4)}{n^{n+1}}$ SI HA

PERCHÉ $n! \leq n^{n-1}$

$$a_n = \frac{n!}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \ln(1+n^4) \leq \frac{1}{n^2} \cdot \ln(1+n^4) \approx \frac{4 \ln n}{n^2} = 4 \cdot \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}$$

MA SAPPIAMO CHE $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(\ln n)^{-1}}$ CONVERGE, QUINDI $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ln(1+n^4)$ CONVERGE

PER IL CR. DEL CONFRONTO ASINTOTICO, QUINDI $\sum a_n$ CONVERGE PER IL

CRITERIO DEL CONFRONTO.

SVOLG. ALTERNATIVO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cancel{!} \ln(1+(n+1)^4)}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{\cancel{n!} \cdot \ln(1+n^4)} =$$

PERCHÉ
$\ln(1+(n+1)^4) \simeq 4 \ln(n+1) \simeq 4 \ln n$
E
$\ln(1+n^4) \approx 4 \ln n$

$$= \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{\ln(1+(n+1)^4)}{\ln(1+n^4)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\ln(1+(n+1)^4)}{\ln(1+n^4)}}}_{\to 1} \to \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e}$$

POICHÉ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e}$ LA SERIE CONVERGE PER IL CR. DEL RAPPORTO.

---

2 STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} A^n$ AL VARIARE DI $A>0$.

SVOLGIMENTO

POSTO $a_n = \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} A^n$, APPLICO IL CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)^{n+1}}{(n+1)^{n+3}} \cdot A^{n+1} \cdot \frac{n^{n+2}}{(n+2)^n} \cdot \frac{1}{A^n} =$$

$$= \frac{n+3}{n+1} \cdot \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+3} \cdot A = \frac{n+3}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+3} \cdot A \to 1 \cdot e \cdot \frac{1}{e} \cdot A = A$$

QUINDI, VISTO CHE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to A$, GRAZIE AL CR. DEL RAPPORTO POSSO DIRE CHE PER $0<A<1$ $\sum a_n$ CONVERGE, MENTRE PER $A>1$ $\sum a_n$ DIVERGE.

IL CASO $A=1$ VA TRATTATO A PARTE.

PER $A=1$ SI HA:

$$a_n = \frac{(n+2)^n}{n^{n+2}} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2} \simeq \frac{e}{n^2}$$

POICHÉ $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE, $\sum a_n$ CONVERGE PER CONFRONTO ASINTOTICO.

$\boxed{3}$ DETERMINARE IL CARATTERE DI $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) + (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

SVOLGIMENTO

SI NOTI CHE $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ CONVERGE PER IL CR. DI LEIBNIZ, VISTO CHE.

$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ DECRESCENDO

PERCHÈ $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

DI CONSEGUENZA, IL CARATTERE DI:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) + (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

È UGUALE AL CARATTERE DI:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

CHE A SUA VOLTA È UGUALE AL CARATTERE DI:

(1) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

PERCHÈ ANCHE $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CONVERGE, GRAZIE A LEIBNIZ.

DUNQUE STUDIARE LA SERIE ASSEGNATA EQUIVALE A STUDIARE **(1)**.

OSSERVIAMO CHE:

$$\ln(1+x) - x = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) - x = -\frac{x^2}{2} + O(x^3) \approx -\frac{x^2}{2}$$

QUINDI:

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = -\frac{1}{2n}$$

MA $\sum -\frac{1}{2n}$ DIVERGE ED È A SEGNO COSTANTE, QUINDI ANCHE LA **(1)** DIVERGE, PER IL CR. DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

PER QUANTO DETTO ANCHE LA SERIE ASSEGNATA DIVERGE.

$\boxed{4}$ DATA $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^\alpha + \sin(3n)}$, STUDIARNE IL CARATTERE NEI CASI:

$\boxed{a}$ $\alpha = 2$

$\boxed{b}$ $\alpha = 1$

$\boxed{c}$ $\alpha = \frac{2}{3}$

FACOLTATIVO $\rightarrow$ $\boxed{d}$ $\alpha = \frac{1}{2}$

SVOLGIMENTO

I 4 CASI PROPOSTI SONO DI DIFFICOLTÀ CRESCENTE: PER CIASCUNO PROPORREMO UN PROCEDIMENTO DIVERSO CHE, IN GENERE VALE ANCHE PER I CASI CHE LO PRECEDONO.

$\boxed{a}$ POSTO $a_n = \frac{(-1)^n}{2n^2 + \sin(3n)}$ SI HA:

$$|a_n| = \frac{1}{|2n^2 + \sin(3n)|} = \frac{1}{2n^2 + \sin(3n)} \approx \frac{1}{2n^2}$$

QUINDI $\sum |a_n|$ CONVERGE PER CONFRONTO ASINTOTICO E, DI CONSEGUENZA $\sum a_n$ CONVERGE PER IL CR. DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA.

$\boxed{b}$ POSTO $a_n = \frac{1}{2n + \sin 3n}$, DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\sum (-1)^n a_n$ CONVERGE.

OSSERVIAMO CHE, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA:

$$2(n+1) + \sin(3(n+1)) \geq 2n + \sin(3n)$$

PERCHÈ:

$$2(n+1)+\sin(3(n+1))-2n-\sin(3n) = 2+\sin(3n+3)-\sin(3n) \geq 2-2=0$$

DI CONSEGUENZA, VISTO CHE PER $n \geq 1$ $\quad 2n+\sin(3n)$ È POSITIVO, SI HA:

$$\frac{1}{2(n+1)+\sin(3(n+1))} \leq \frac{1}{2n+\sin(3n)}$$

CIOÈ (a_n) È DECRESCENTE.

INOLTRE $a_n \to 0$ PERCHÈ $2n+\sin(3n) \to +\infty$.

SONO QUINDI SODDISFATTE LE CONDIZIONI DEL CR. DI LEIBNIZ, PERCIÒ $\sum (-1)^n a_n$ CONVERGE.

$\boxed{C}$ STAVOLTA LEIBNIZ NON FUNZIONA PERCHÈ $a_n = \dfrac{1}{2\cdot n^{\frac{2}{3}}+\sin(3n)}$ NON È DECRESCENTE.

TUTTAVIA, SFRUTTANDO IL FATTO CHE $\sum \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}}$ CONVERGE (PER LEIBNIZ) POSSIAMO AFFERMARE CHE

(2)
$$\sum (-1)^n a_n \quad \text{E} \quad \sum \left((-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} \right)$$

HANNO LO STESSO CARATTERE, BASTERÀ DUNQUE STUDIARE LA SECONDA.

OSSERVIAMO CHE:

$$(-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n^{\frac{2}{3}}+\sin(3n)} - \frac{1}{2n^{\frac{2}{3}}} \right) =$$

$$= (-1)^n \frac{2n^{\frac{2}{3}} - 2n^{\frac{2}{3}} - \sin(3n)}{\left(2n^{\frac{2}{3}}+\sin(3n)\right)\cdot 2n^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\sin(3n)}{4n^{\frac{4}{3}}+2n^{\frac{2}{3}}\sin(3n)}.$$

QUINDI:

$$\left| (-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} \right| = \frac{|\sin(3n)|}{\left|4n^{\frac{4}{3}}+2n^{\frac{2}{3}}\sin(3n)\right|} \leq \underbrace{\boxed{\frac{1}{\left|4n^{\frac{4}{3}}+2n^{\frac{2}{3}}\sin(3n)\right|}}}_{\boxed{A}} \simeq \frac{1}{4n^{\frac{4}{3}}}$$

A QUESTO PUNTO, VISTO CHE $\sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ CONVERGE, VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$$\sum \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \text{ CONVERGE } \underset{\text{CONFRONTO ASINTOTICO}}{\Rightarrow} \sum \boxed{A} \text{ CONVERGE } \underset{\text{CONFRONTO}}{\Rightarrow} \sum \left| (-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} \right| \text{ CONVERGE } \underset{\text{ASSOLUTA CONVERGENZA}}{\Rightarrow} \sum \left((-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2n^{\frac{2}{3}}} \right) \text{ CONVERGE}$$

RICORDANDO ORA CHE VALE (2) POSSIAMO CONCLUDERE CHE ANCHE $\sum(-1)^n a_n$ CONVERGE.

d POSTO $a_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n} + \sin(3n)}$, DOBBIAMO TROVARE IL CARATTERE DI $\sum(-1)^n a_n$.

ANCHE STAVOLTA, COME PER **C**, NON SI PUÒ APPLICARE LEIBNIZ PERCHÈ (a_n) NON È DECRESCENTE.

PROCEDENDO COME IN **C**, VISTO CHE $\sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ CONVERGE (PER LEIBNIZ), POSSIAMO DIRE CHE:

(3) $$\sum(-1)^n a_n \qquad \text{E} \qquad \sum\left((-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}\right)$$ HANNO STESSO CARATTERE.

BASTERÀ DUNQUE STUDIARE LA SECONDA. SI HA:

$$(-1)^n a_n - \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} = (-1)^n\left(\frac{1}{2\sqrt{n}+\sin(3n)} - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \frac{2\sqrt{n} - 2\sqrt{n} - \sin(3n)}{\left(2\sqrt{n}+\sin(3n)\right)\cdot 2\sqrt{n}} = \boxed{\frac{(-1)^{n+1}\sin(3n)}{4n + 2\sqrt{n}\cdot\sin 3n}}$$

FIN QUI È STATO TUTTO UGUALE A **C**, TUTTAVIA A QUESTO PUNTO PER STUDIARE $\sum \square$ CI SERVE UN'ALTRA IDEA PERCHÈ AL DENOMINATORE ABBIAMO n NON $n^{\frac{4}{3}}$, QUINDI NON C'È LA POSSIBILITÀ DI RICORRERE ALLA CONVERGENZA ASSOLUTA.

L'IDEA È LA SEGUENTE: SE DIMOSTRIAMO CHE $\sum \dfrac{(-1)^n \sin(3n)}{4n}$ CONVERGE (COSA CHE FAREMO) ALLORA POSSIAMO AFFERMARE CHE:

(4) $$\sum \frac{(-1)^{n+1}\sin(3n)}{4n+2\sqrt{n}\sin(3n)} \qquad \text{E} \qquad \sum\left(\frac{(-1)^{n+1}\sin(3n)}{4n+2\sqrt{n}\sin(3n)} + \frac{(-1)^n\sin(3n)}{4n}\right)$$ HANNO LO STESSO CARATTERE

QUINDI BASTA STUDIARE LA SECONDA. SI HA:

$$\frac{(-1)^{n+1}\sin(3n)}{4n+2\sqrt{n}\sin(3n)} + \frac{(-1)^n\sin(3n)}{4n} = (-1)^{n+1}\sin(3n)\cdot\frac{4n - 4n - 2\sqrt{n}\sin(3n)}{\left(4n+2\sqrt{n}\sin(3n)\right)\cdot 4n} = \boxed{\frac{(-1)^n \sin^2(3n)}{8n\sqrt{n}+4n\sin(3n)}}$$

STAVOLTA, SFRUTTANDO IL FATTO CHE IL DENOMINATORE DI $\square$ È $\simeq 8n\sqrt{n}$, SI OTTIENE CHE $\sum\square$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE E QUINDI ANCHE SEMPLICEMENTE.

A QUESTO PUNTO, DA (4) SEGUE CHE ANCHE

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}\sin(3n)}{4n+2\sqrt{n}\sin(3n)}$$ CONVERGE,

E QUINDI, GRAZIE A (3), ANCHE LA SERIE DI PARTENZA CONVERGE.

PER CHIUDERE L'ARGOMENTAZIONE CI RIMANE DA DIMOSTRARE CHE:

$$\sum \frac{(-1)^n \sin(3n)}{4n}$$ CONVERGE.

A TALE SCOPO, PER APPLICARE IL CRITERIO DI ABEL, BASTA DIMOSTRARE CHE LA SUCCESSIONE (B_n) DEFINITA DA $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(3k)$ È LIMITATA. A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE:

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin(3k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \Im m\left((-e^{3i})^k\right)\right| = \left|\Im m\left(\sum_{k=1}^{n} (-e^{3i})^k\right)\right| = \left|\Im m\left(-e^{3i}\cdot\frac{1-(-e^{3i})^n}{1+e^{3i}}\right)\right| \leq \frac{2}{|1+e^{3i}|}$$

QUINDI SI PUÒ APPLICARE IL CR. DI ABEL.

ESIBENDO UN CONTROESEMPIO

$\boxed{5}$ DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $\mathbb{R}$, DIMOSTRARE O CONFUTARE LE SEGUENTI AFFERMAZIONI:

$\boxed{a}$ $\sum a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE $\Rightarrow$ $\sum a_n^2$ CONVERGE

$\boxed{b}$ $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n^2$ CONVERGE

$\boxed{c}$ $\sum n a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n$ CONVERGE

FACOLTATIVO $\rightarrow$ $\boxed{d}$ $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum a_n^3$ CONVERGE

SVOLGIMENTO

$\boxed{a}$ **VERA** INFATTI:

$$\left(\sum |a_n| \text{ CONVERGE}\right) \Rightarrow \left(|a_n| \to 0\right) \Rightarrow \left(\text{DEF. IN } n \ |a_n| < 1\right) \Rightarrow \left(\text{DEF. IN } n \ \ 0 \leq a_n^2 \leq |a_n|\right)$$

QUINDI, PER IL CR. DEL CONFRONTO, DALLA CONVERGENZA DI $\sum |a_n|$ SEGUE QUELLA DI $\sum a_n^2$.

$\boxed{b}$ **FALSA** CONTROESEMPIO: $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CONVERGE MA $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum \frac{1}{n}$ DIVERGE

$\boxed{c}$ **VERA** INFATTI, POSTO $b_n = n a_n$, EQUIVALE A DIRE CHE:

$$\sum b_n \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum \frac{b_n}{n} \text{ CONVERGE}$$

MA QUESTO SEGUE SUBITO DAL CR. DI ABEL, PERCHÉ SE $\sum b_n$ CONVERGE ALLORA LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE HA LIMITE FINITO QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, È LIMITATA.

$\boxed{d}$ **FALSA** PRESA
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt[6]{n}} & \text{SE } n \text{ È UN QUADRATO PERFETTO} \\[2ex] -\dfrac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^{\frac{4}{3}}} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

MOSTRIAMO CHE $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ CONVERGE MA $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n^3$ DIVERGE A $+\infty$

MOSTRIAMO PRIMA CHE $\sum a_n^3$ DIVERGE A $+\infty$

SI HA:

(5) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \max\{a_n^3, 0\} = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt[6]{k^2}}\right)^3 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{8}{k} = \text{DIVERGE A } +\infty$$

PER QUANTO RIGUARDA I TERMINI NEGATIVI SI OSSERVI CHE

$$0 \geq \min\{a_n^3, 0\} \geq \left(-\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^{\frac{4}{3}}}\right)^3 = -\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^4} \geq -\frac{1}{(\sqrt{n}-1)^4} \approx -\frac{1}{n^2}$$

DA CUI SEGUE CHE:

(6) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \min\{a_n^3, 0\} \quad \text{CONVERGE}$$

METTENDO INSIEME (5) E (6) SI OTTIENE CHE $\sum a_n^3$ DIVERGE A $+\infty$.

MOSTRIAMO CHE $\sum a_n$ CONVERGE.

SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE, VOGLIAMO MOSTRARE CHE (S_n) HA LIMITE FINITO.

PRIMA MOSTRIAMO CHE (S_{k^2}) HA LIMITE FINITO. SI HA:

$$S_{k^2} = \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{p=m^2+1}^{(m+1)^2} a_p = \sum_{m=1}^{k-1}\left(-\frac{1}{m^{\frac{4}{3}}}\left((m+1)^2-1-m^2-1\right) + \frac{2}{\sqrt[3]{m+1}}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k-1}\left(-\frac{1}{m\sqrt[3]{m}}\cdot(2m-1) + \frac{2}{\sqrt[3]{m+1}}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k-1}\left(\frac{1}{m\sqrt[3]{m}} + \overbrace{2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{m+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{m}}\right)}^{\text{TELESCOPICA}}\right) =$$

$$= -2 + \frac{2}{\sqrt[3]{k}} + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m\sqrt[3]{m}}$$

QUINDI:

$$\lim_{k\to+\infty} S_{k^2} = \lim_{k\to+\infty}\left(-2 + \frac{2}{\sqrt[3]{k}} + \sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m\sqrt[3]{m}}\right) = -2 + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m\sqrt[3]{m}} = \text{ESISTE FINITO}$$

PERCHÉ $\sum \frac{1}{m\sqrt[3]{m}}$ CONVERGE

QUINDI (S_{k^2}) HA LIMITE FINITO ℓ.

MA ANCHE (S_{k^2-1}) HA LIMITE ℓ PERCHÉ:

$$S_{k^2-1} = S_{k^2} - a_{k^2} \longrightarrow \ell - 0 = \ell$$

INFINE, VISTO CHE I TERMINI DI a_n SONO NEGATIVI SE n NON È UN QUADRATO, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ TALE CHE $k^2 \leq n \leq (k+1)^2-1$ SI HA:

$$S_{(k+1)^2-1} \leq S_n \leq S_{k^2}$$

QUINDI TUTTA (S_n) TENDE AD ℓ.