

# ESERCITAZIONI DI ANALISI 1

Exe. **2**

10 OTTOBRE 2022

## ESERCIZI PROPOSTI

- STABILIRE SE  $f: A \rightarrow A$  E  $g: A \rightarrow A$  SONO  
 $x \mapsto 5x+1$   $x \mapsto x^2$   
INIETTIVE E/O SURIETTIVE NEI CASI SEGUENTI:

1)  $A = \mathbb{R}$

2)  $A = \mathbb{Q}$

3)  $A = \mathbb{R}^+$

4)  $A = \mathbb{Q}^+$

ESERCIZI SIMILI DALL'ESERCIZIARIO: N. 48-56, PAG 11 ←

- DELLE FUNZIONI SEGUENTI DIRE SE SONO INVERTIBILI E IN CASO  
AFFERMATIVO SCRIVERNE LA FUNZIONE INVERSA:

5)  $f: [-1,0] \cup (1,2] \rightarrow [0,4]$   
 $x \mapsto x^2$

6)  $f: [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$   
 $x \mapsto \sin x$

7)  $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$   
 $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

8)  $f: [\pi, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$   
 $x \mapsto \cos x$

9)  $f: [2\pi, 3\pi] - \{\frac{5}{2}\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \tan x$

10)  $f: [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \rightarrow [0, 1]$   
 $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$

ESERCIZI SIMILI DALL'ESERCIZIARIO: N. 93-98, PAG 12 ←

COSTRUIRE  $f: \mathbb{R} \rightarrow A$  BIUNIVOCA NEI SEGUENTI CASI:

11)  $A = (-1, 1)$

12)  $A = \mathbb{R} - \{0\}$

13)  $A = [0, +\infty)$

ESERCIZI SIMILI DALL'ESERCIZIARIO: N. 114-119, PAG 13 ←

## QUESITI PROPOSTI

7 Dati  $A, B \subset \mathbb{R}$  non vuoti tali che esista un solo maggiorante di  $A$  che sia anche minorante di  $B$ . Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere?

- (a)  $\sup A \leq \inf B$ ;
- (b)  $\sup A = \inf B$ ;
- (c)  $A$  e  $B$  sono disgiunti.

☐ A tutte ☐ B solo (a) ☐ C solo (a) e (b) ☐ D solo (c) ☐ E solo (a) e (c) ☐ F nessuna

11 Dati  $A, B \subset \mathbb{R}$ , limitati e non vuoti. Si considerino le affermazioni:

- (a)  $\inf A \leq \inf B$ ;
- (b) ogni minorante di  $A$  è anche minorante di  $B$ ;
- (c)  $B \subset A$ .

Allora l'affermazione (a) è:

- ☐ A più debole di (b) ma più forte di (c)
- ☐ B più debole sia di (b) che di (c)
- ☐ C equivalente a (b) ma più debole di (c)
- ☐ D più forte sia di (b) che di (c)
- ☐ E equivalente a (b) ma più forte di (c)
- ☐ F più forte di (b) ma più debole di (c)

23 Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- (a) quando  $f \circ f$  è iniettiva, necessariamente lo è anche  $f$ ;
- (b) quando  $f \circ f$  è suriettiva, necessariamente lo è anche  $f$ ;
- (c) quando  $f$  è iniettiva, necessariamente lo è anche  $f \circ f$ .

☐ A solo (c) ☐ B solo (b) ☐ C solo (a) ☐ D solo (b) e (c) ☐ E tutte ☐ F nessuna

# SVOLGIMENTI

3

①

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 5x+1$$

INIETTIVA? SÌ

SURIETTIVA? SÌ

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

INIETTIVA? NO

SURIETTIVA? NO

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

$$x_1, x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$5x_1 + 1 = 5x_2 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = x_2$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \text{ t.p. } f(x) = y?$$

$$5x+1 = y \quad ?$$

$$5x = y-1$$

$$x = \frac{y-1}{5}$$

$$y = -1$$

$$\nexists x \in \mathbb{R} \text{ t.p.}$$

$$g(x) = -1$$

PERCHÉ

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 \geq 0$$

②

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$
$$x \mapsto 5x+1$$

INIETTIVA?

SURIETTIVA?

$$g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$x \mapsto x^2$$

INIETTIVA?

SURIETTIVA?

NO

COME PRIMA

COME  
PRIMA



3

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto 5x+1$$

INIEKTIVA?

SURIEKTIVA?

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

INIEKTIVA?

SURIEKTIVA?

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = x_2$$

④

$$f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$$

$$x \mapsto 4x+1$$

INIETTIVA?

SVRIETTIVA?

$$g: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

INIETTIVA?

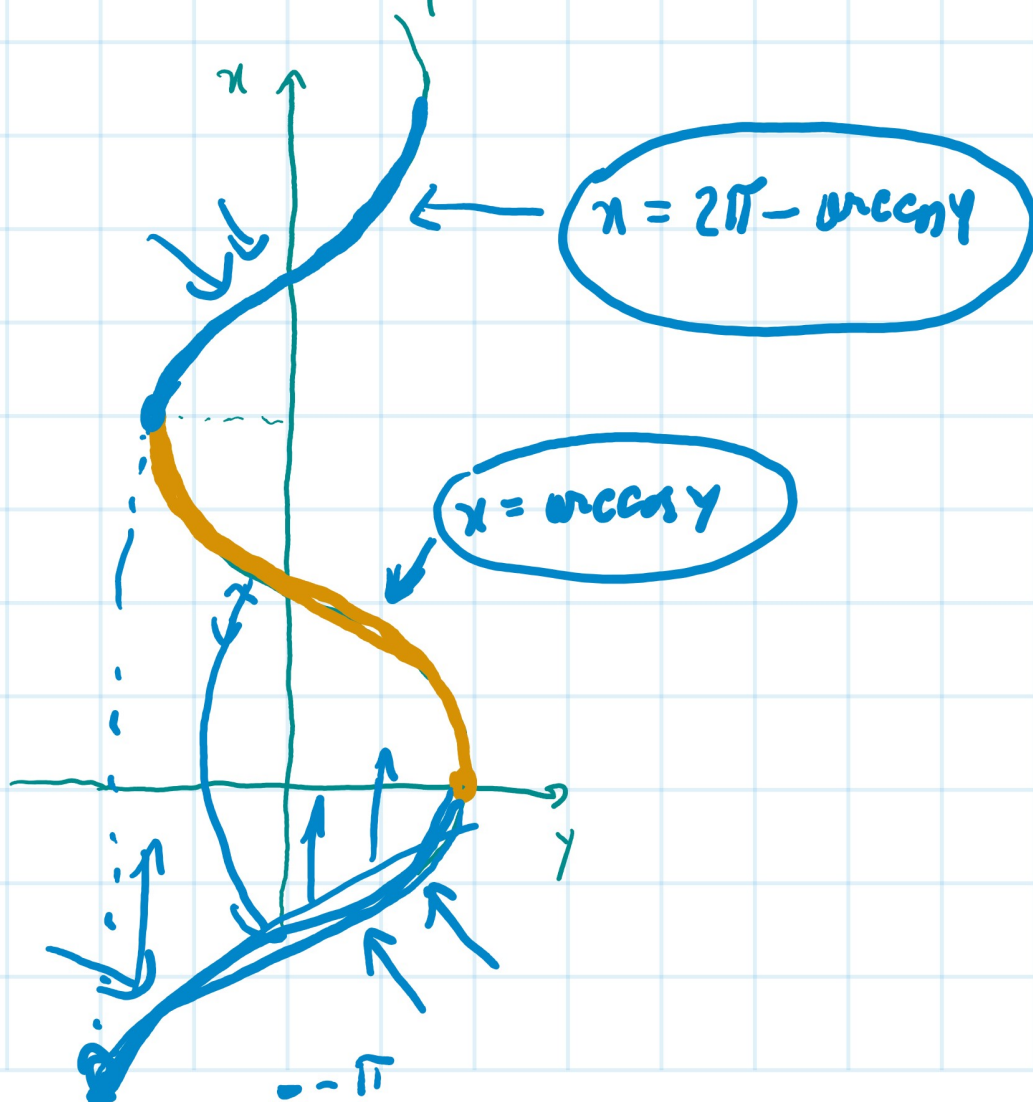
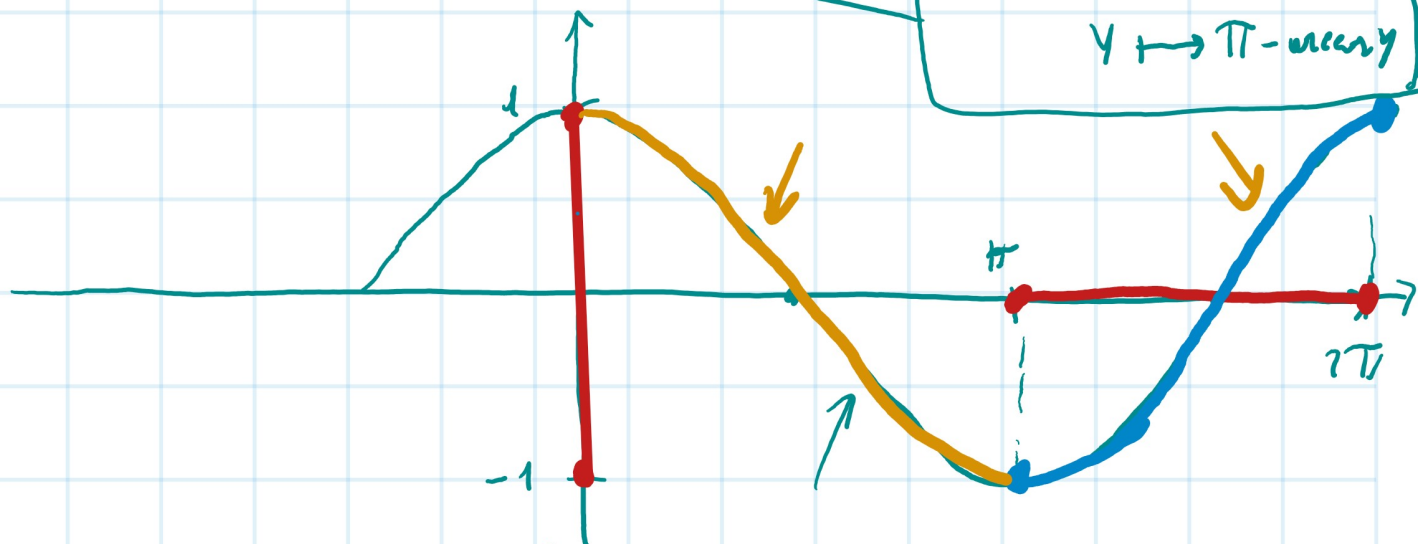
SVRIETTIVA? (NO)

$$x^2 = 2$$

8)  $f: [\pi, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$   
 $x \mapsto \cos x$

TROVARE (SE C'E')  
 INVERSA

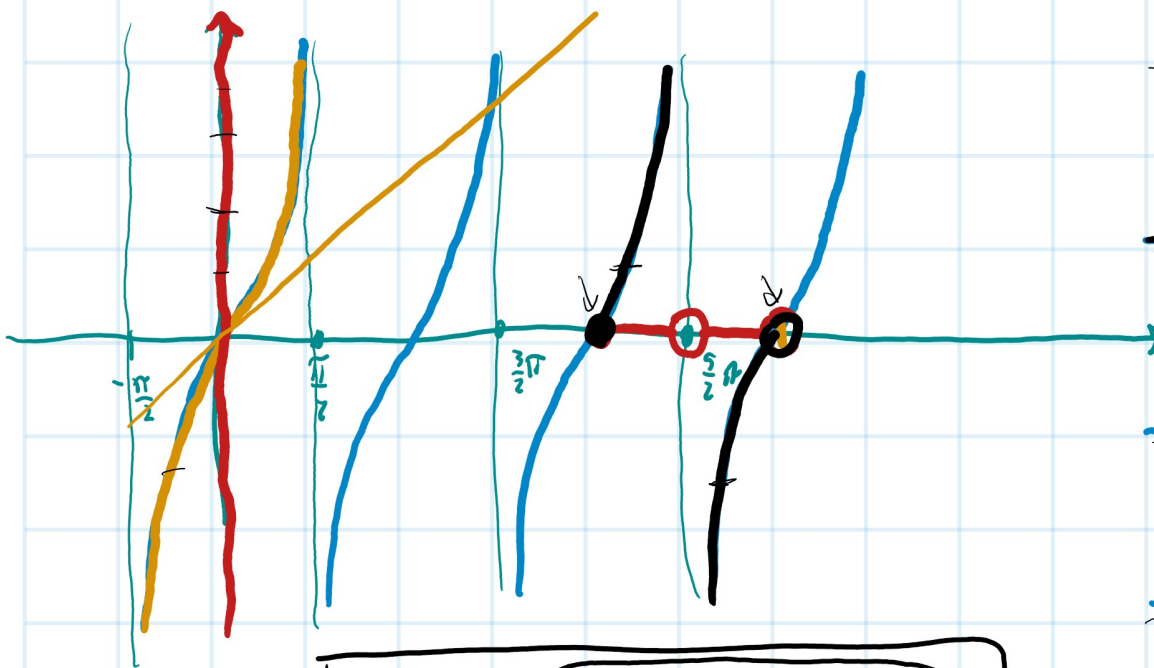
$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [\pi, 2\pi]$   
 $y \mapsto \pi - \arccos y$



9)  $f: [2\pi, 3\pi) - \{\frac{5}{2}\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \tan x$

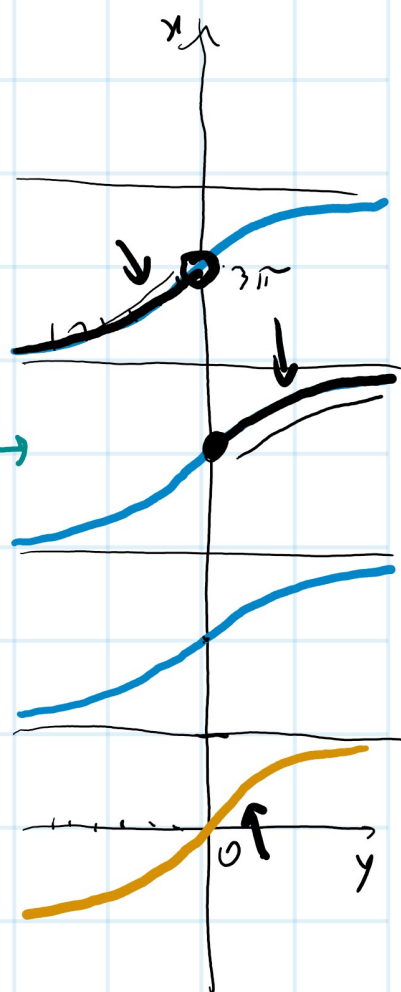
TROVARE (SE C'E')  
INVERSA



$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 3\pi + \arctan y & y < 0 \\ 2\pi + \arctan y & y \geq 0 \end{cases}$$

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow [2\pi, 3\pi) - \{\frac{5}{2}\pi\}$

$y \mapsto \text{circle}$

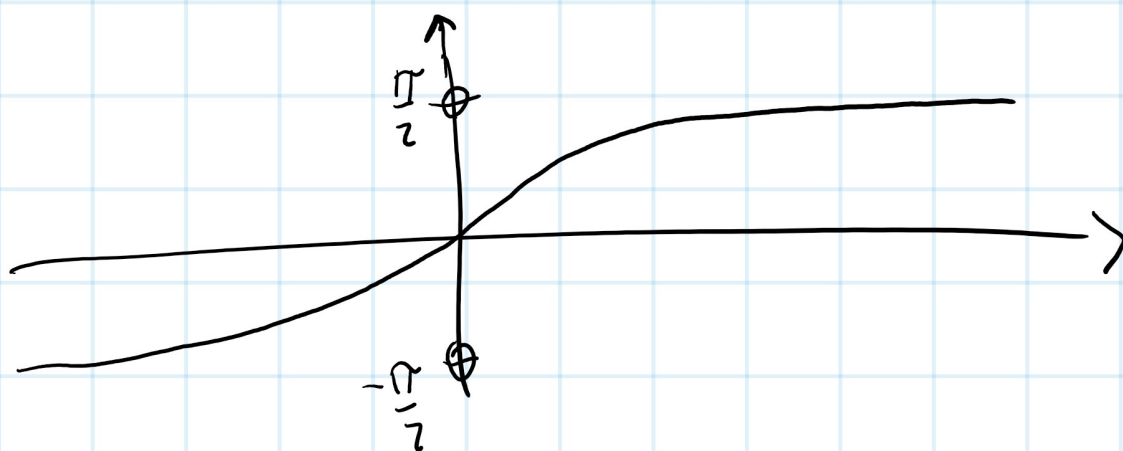




11) COSTRUIRE UNA FUNZIONE BIUNIVOCHE  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1,1)$

$$\downarrow$$

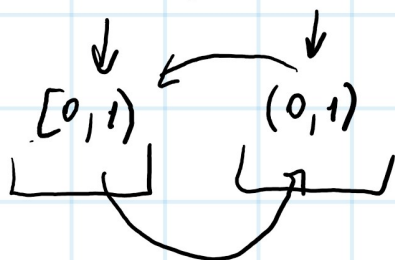
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$$



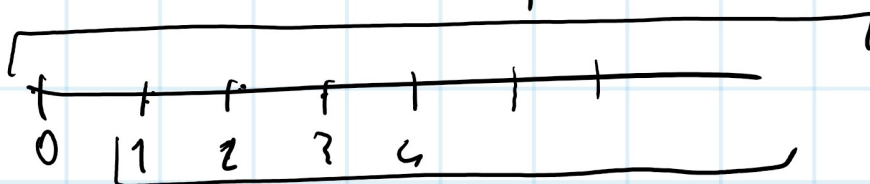
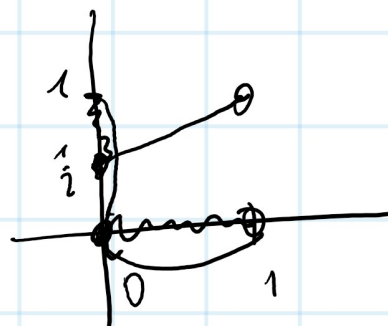


ESEMPIO AGGIUNTO: COSTRUIRE BIEZIONE

TRA  $[0, 1)$  E  $(0, 1)$ .



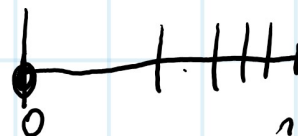
$[\frac{1}{2}, 1)$



$$I = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots \right\}$$

$$f_1: I \rightarrow I - \{0\}$$

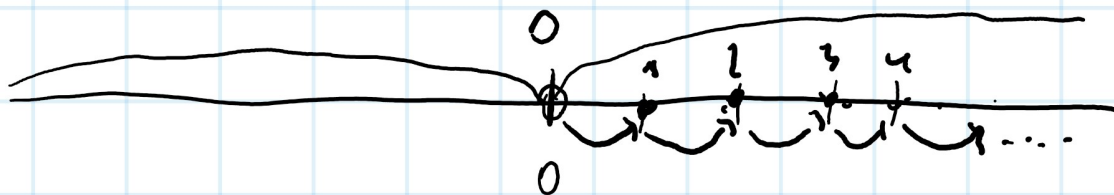
$$\frac{n-1}{n} \mapsto \frac{n}{n+1}$$



$$f: [0, 1) \rightarrow (0, 1)$$

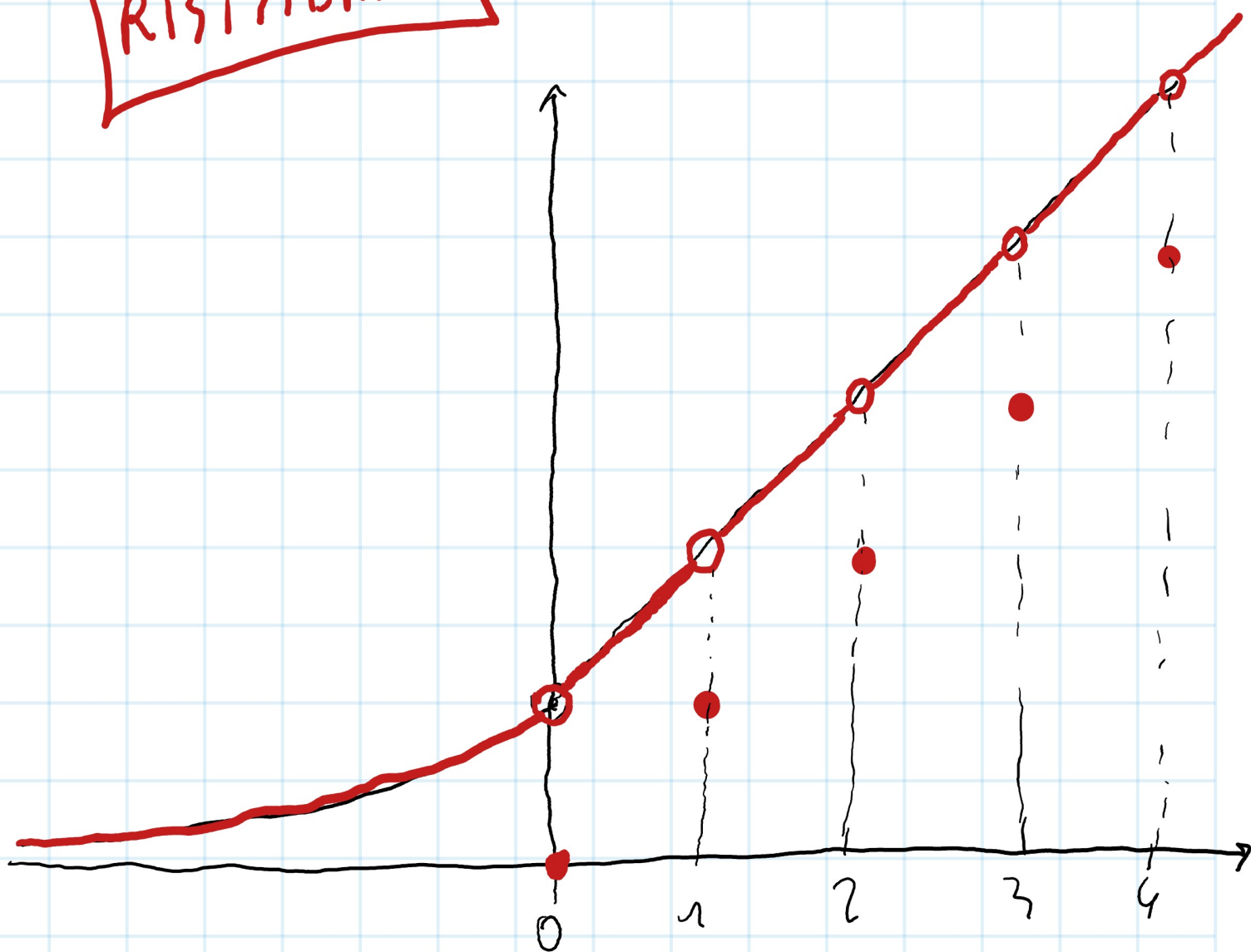
$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \notin I \\ f_1(x) & \text{se } x \in I \end{cases}$$

12) COSTRUIRE UNA FUNZIONE BIUNIVOCA  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$



13) COSTRUIRE UNA FUNZIONE BIUNIVOCA  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

RISISTEMATA



$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{PER } x < 0 \\ n+1 & \text{PER } x \in [0, +\infty) - \mathbb{N} \\ x & \text{PER } x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

7 Dati  $A, B \subset \mathbf{R}$  non vuoti tali che esista un solo maggiorante di  $A$  che sia anche minorante di  $B$ . Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere?

(a)  $\sup A \leq \inf B$ ;  $\textcircled{V}$

(b)  $\sup A = \inf B$ ;  $\textcircled{V}$

(c)  $A$  e  $B$  sono disgiunti.  $\textcircled{F}$

☐ A tutte ☐ B solo (a) ☒ C solo (a) e (b) ☐ D solo (c) ☐ E solo (a) e (c) ☐ F nessuna

$\exists! \lambda \text{ t.c. } \lambda \text{ magg. di } A \text{ e } \lambda \text{ min. di } B$

$$\begin{cases} A = (-\infty, \lambda] \\ B = [\lambda, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sup A &\leq \lambda \\ \inf B &\geq \lambda \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{c} \lambda \\ \boxed{\lambda + \varepsilon} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\inf B = \lambda}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \text{ magg. di } A \\ \textcircled{\lambda - \varepsilon} \text{ non \u00e9 magg. di } A \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lambda = \sup A}$$



11 Dati  $A, B \subset \mathbf{R}$ , limitati e non vuoti. Si considerino le affermazioni:

(a)  $\inf A \leq \inf B$ ;  $\leftarrow$

(b) ogni minorante di  $A$  è anche minorante di  $B$ ;  $\leftarrow$

(c)  $B \subset A$ .

Allora l'affermazione (a) è:

☐ A più debole di (b) ma più forte di (c)    ☐ B più debole sia di (b) che di (c)

☒ C equivalente a (b) ma più debole di (c)    ☐ D più forte sia di (b) che di (c)

☐ E equivalente a (b) ma più forte di (c)    ☐ F più forte di (b) ma più debole di (c)

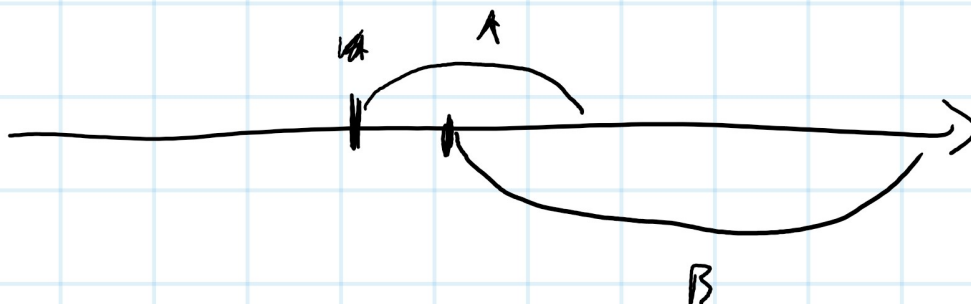
$(c) \Rightarrow (a)$   
(a)  $\not\Rightarrow (c)$

$B \subset A$

MINORANTI DI A SONO <sup>ANCHE</sup> MINORANTI DI B

MAX MINORANTI DI A  $\leq$  MAX MIN. DI B

$\inf A \leq \inf B$



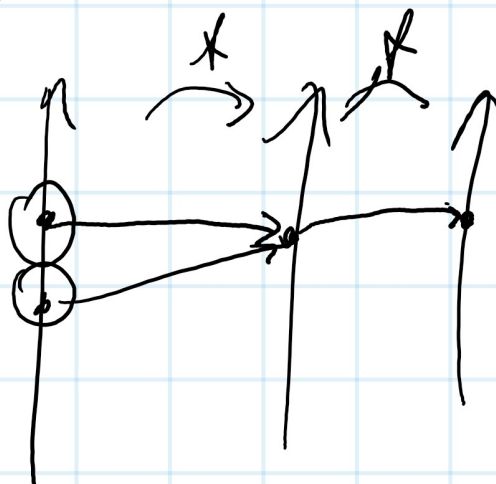
$A = [0, 2]$      $B = [1, +\infty)$

23 Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- (a) quando  $f \circ f$  è iniettiva, necessariamente lo è anche  $f$ ; ☒  
 (b) quando  $f \circ f$  è suriettiva, necessariamente lo è anche  $f$ ; ☒  
 (c) quando  $f$  è iniettiva, necessariamente lo è anche  $f \circ f$ . ☒

☐ A solo (c) ☐ B solo (b) ☐ C solo (a) ☐ D solo (b) e (c) ☒ E tutte ☐ F nessuna

(?)  $f \circ f$  iniettiva  $\Rightarrow f$  iniettiva



$f \circ f$  iniettiva  $\Rightarrow f$  suriettiva

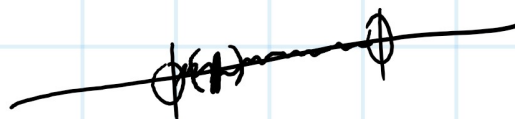
$\Leftarrow f$  non suriettiva



$\exists b \in \mathbf{R}$  t.c.  
 $\forall x \in \mathbf{R} f(x) \neq b$

AGGIUNTO : MOSTRARE CHE  $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ aperto}\}$   
 HA STESSA CARDINALITÀ DI  $\mathbb{R}$ .

$$\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$



↓  
 $A \subset \mathbb{R}$  È APERTO SE  
 $\forall x \in A \exists \delta > 0 \text{ t.c. } (x-\delta, x+\delta) \subset A$

$$\mathcal{I} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q} \quad a < b\} \quad \text{NUM.}$$

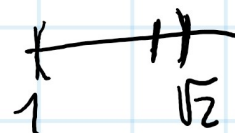


$A$  aperto ogni  $x \in A$  HA  $(a,b) \in \mathcal{I}$  t.c.  $x \in (a,b) \subset A$

$$A = \bigcup_{x \in A} I_x$$

$A$

$$\mathcal{I}_A = \{I_x \mid x \in A\} \subset \mathcal{I}$$



OGNI APERTO CORRISPONDE A UN ELEMENTO DI  $\mathcal{P}(\mathcal{I})$

cardinalità  
del Calcolo

NUMERABILE