

ESERCITAZIONI DI ANALISI 1

EXE. 3

14 OTTOBRE 2022

ESERCIZI PROPOSTI

TROVARE PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, DI ACCUMULAZIONE E ISOLATI DEI SEGUENTI INSIEMI

1) $A = (-\infty, 0] \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (\mathbb{Q} \cap (10, +\infty))$

2) $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \geq 1 \right\}$ (I° APPELLO SETTEMBRE 2022)

3) $A = \{ \sqrt{m} - \sqrt{n} \mid n, m \in \mathbb{N} \}$ (P. 42 CAP. 1, ESERCIZIARIO)

4) $A = \{ n\pi - \lfloor n\pi \rfloor \mid n \in \mathbb{N} \}$ (SIMILE AL P. 43 CAP. 1, ESERCIZIARIO)

5) $A = \{ x + y \mid \lim x = 0, \lim y = 0 \}$

6) $A = \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \geq 1 \right\}$

ESERCIZI SIMILI DALL'ESERCIZIARIO: N. 31-44, PAG 10

QUESITI PROPOSTI

- 7) È VERO CHE $\partial A = \partial A^c$ PER OGNI $A \subset \mathbb{R}$?
- 8) TROVARE TUTTI GLI $A \subset \mathbb{R}$ TALI CHE $\partial A = \emptyset$.
- 9) TROVARE TUTTI GLI $A \subset \mathbb{R}$ CHE SONO SIA APERTI CHE CHIUSI.
- 10) È VERO CHE $\partial A = \overline{\partial A}$ PER OGNI $A \subset \mathbb{R}$?
- 11) È VERO CHE $\partial A = \partial \bar{A}$ PER OGNI $A \subset \mathbb{R}$?
- 13) È VERO CHE $\partial A = \partial A^\circ$ PER OGNI $A \subset \mathbb{R}$?
- 14) DATO $A \subset \mathbb{R}$, QUANTI INSIEMI SI POSSONO OTTENERE, AL MASSIMO, PARTENDO DA A E ESTRAENDO, RIPETUTAMENTE, PARTE INTERNA E CHIUSURA, NELL'ORDINE CHE SI PREFERISCE ?

PER CASA SI PROVI A RISPONDERE AI QUESITI

15, 16, 17 PAG 16 E 18, 19 PAG 17 DELL'ESERCIZIARIO

ESERCIZI PROPOSTI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE

DIMOSTRARE PER INDUZIONE CHE:

$$15) \quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$16) \quad 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

17) GLI ANAGRAMMI DI UNA PAROLA CON n LETTERE DIVERSE SONO $n!$

18) GLI ANAGRAMMI DI $\underbrace{AA\dots A}_{k} \underbrace{BB\dots B}_{n-k}$ SONO $\binom{n}{k}$

19) GLI ANAGRAMMI DI

$\underbrace{A_1 A_1 \dots A_1}_{n_1} \underbrace{A_2 A_2 \dots A_2}_{n_2} \underbrace{A_3 A_3 \dots A_3}_{n_3} \dots \underbrace{A_k A_k \dots A_k}_{n_k}$

SONO

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

20) [DIS. BERNOWI] SE $x > -1$ E $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ALLORA $(1+x)^n \geq 1+nx$
 CON UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $x=0$.

21) SE $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ E $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$
 ALLORA $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq 1$ CON L'UGUAGLIANZA
 CHE VALE SE E SOLO SE $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

(N.B. USANDO (7) SI PUÒ GENERALIZZARE (6) AL CASO
 IN CUI L'ESPOONENTE È RAZIONALE, POI PER
 DENSITÀ SI FA IL CASO IN CUI ESPONENTE È REALE)

SVOLGIMENTI

16

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\underbrace{1+2+\dots+n}_{\text{sum of first } n \text{ numbers}} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\begin{array}{lll} 1^3 & = 1 & = 1^2 = (1)^2 \\ 1^3 + 2^3 & = 9 & = 3^2 = (1+2)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 & = 36 & = 6^2 = (1+2+3)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 & = 100 & = 10^2 = (1+2+3+4)^2 \end{array}$$

$n=1$? (91)

$n=k \Rightarrow n=k+1$?

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3}_{\text{sum of first } k \text{ cubes}} + (k+1)^3 = \left(\frac{k \cdot (k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2 \left(\left(\frac{k}{2} \right)^2 + (k+1) \right) = (k+1)^2 \frac{k^2 + 4k + 4}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2$$

(20)

DIS. DI BERNOLLI

$$\underbrace{(1+x)^n}_{\uparrow} \geq 1+nx$$

$$n \geq 1 \quad (n \geq 2) \\ x > -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \boxed{n > -1} \\ \boxed{\alpha > 1} \rightarrow (1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \end{array} \right\} \text{"=" VALE} \Leftrightarrow x=0$$

$$\boxed{0 < \alpha < 1} \quad (1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$$

$$\alpha = \frac{m}{n} \quad \boxed{m < n}$$

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \leq 1+\frac{m}{n}x$$

??

DATI $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ SI HA

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

GM

AM

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x) \cdot (1+x) \cdots (1+x)}_m \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{n-m}} < \\
 &\leq \frac{m(1+x) + (n-m) \cdot 1}{n} = \frac{n \cdot 1 + mx}{n} = \\
 &= 1 + \frac{m}{n}x
 \end{aligned}$$

21) SE $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ E $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$
 ALLORA $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leq 1$ CON L'UGUAGLIANZA
 CHE VALE SE E SOLO SE $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$

$$\boxed{n=1}$$

$$\boxed{n=k} \Rightarrow \boxed{n=k+1}$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}_{a_k > 1} + \underbrace{a_{k+1}}_{a_{k+1} < 1} = k+1 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \leq 1$$

LEMMA DATI $a, b \in \mathbb{R}^+$ t.c. $0 < a < 1 < b$

ALLORA $\exists c > 0$ t.c. 1) $c+1 = a+b$
 2) $c \cdot 1 > a \cdot b$

DIM

PRENDO $c = a+b-1$ QUINDI VALE (1)

INOLTRE

$$c \cdot 1 = c = a+b-1 \stackrel{?}{>} a \cdot b$$

$$a \cdot b - a - b + 1 < 0 \quad ?$$

$$\underbrace{(b-1)}_{>0} \underbrace{(a-1)}_{<0} < 0 \quad ?$$

PRENDO $c, 1$ t.c. $c+1 = a_k + a_{k+1}$

$$c \cdot 1 > a_k \cdot a_{k+1}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k-1} \cdot \underbrace{a_k \cdot a_{k+1}} \in$$

$$\underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{k-1} \cdot c \cdot 1}_{\substack{a_k + a_{k+1}}} \leq 1 \cdot 1 = 1$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + c + 1}_{\substack{a_k + a_{k+1}}} =$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = k + 1$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + c = k$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \stackrel{?}{\leq} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$A_1 = \frac{a_1}{\lambda}, \quad A_2 = \frac{a_2}{\lambda}, \quad \dots, \quad A_n = \frac{a_n}{\lambda}$$

$$\overbrace{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda} + \dots + \frac{a_n}{\lambda} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\lambda} =$$

$$= \frac{\cancel{a_1 + \dots + a_n}}{\frac{\cancel{a_1 + \dots + a_n}}{n}} = n$$

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \leq 1$$

$$\frac{a_1}{\lambda} \cdot \frac{a_2}{\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{\lambda} \leq 1$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \lambda = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\textcircled{1} \quad (1+x)^{\frac{m}{n}} \leq 1 + \frac{m}{n}x$$

$$\textcircled{m < n}$$

$$\textcircled{?} \quad (1+x)^{\frac{m}{n}} \geq \underbrace{1 + \frac{m}{n}x}_{> 0}$$

$$\textcircled{m > n}$$

$$\boxed{\textcircled{?}} \quad (1+x) \geq \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{\frac{n}{m}}$$

$$\left(1 + \left(\frac{m}{n}x\right)\right)^{\frac{n}{m}} \leq 1 + \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}x = 1+x$$

18)

GLI ANAGRAMMI DI

$$\overbrace{AA \dots A}^k \overbrace{BB \dots B}^{n-k}$$

(n)

SONO

$$\binom{n}{k}$$

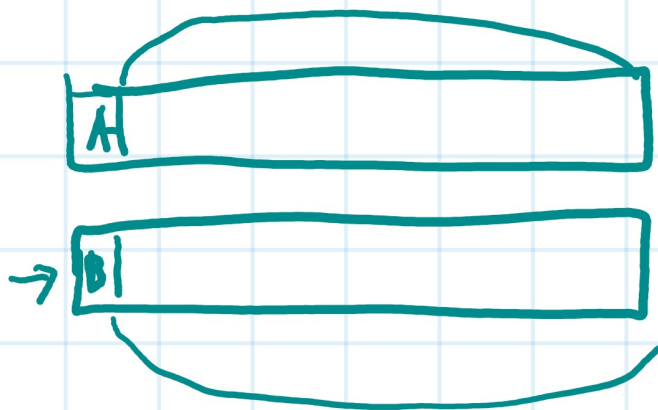
$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

 $(n=1)$ SI (ovvero)

 $(h=m) \rightarrow (h=m+1)$

$$\overbrace{A \dots A}^k \overbrace{B \dots B}^{m+1-k}$$

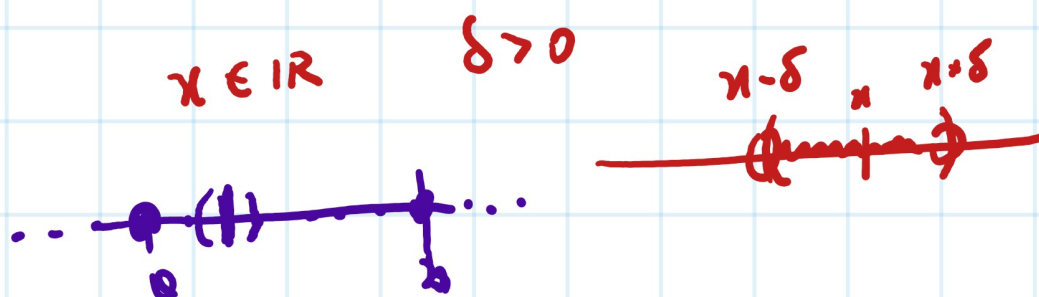
$m+1$

$$\left\{ \begin{array}{l} k-1 \text{ [A]} \\ m+1-k \text{ [B]} \end{array} \right.$$


$$\frac{m!}{(k-1)! \cdot (m+1-k)!}$$

$$\frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{m! \cdot \overbrace{(m+1-k)}^{\quad}}{k! \cdot \underbrace{(m-k)!}_{\quad} \cdot \underbrace{(m+1-k)}_{\quad}} + \frac{\widehat{k} \cdot m!}{\underbrace{k(k-1)!}_{\quad} \cdot \underbrace{(m+1-k)!}_{\quad}} \right| = \\
 & \left| = \frac{m!}{k! \cdot (m+1-k)!} \left(\frac{1 \cdot \overbrace{(m+1-k)}^{\quad}}{1 \cdot} + \frac{\widehat{k} \cdot 1}{1} \right) \right| = \\
 & = \frac{(m+1)!}{k! \cdot (m+1-k)!}
 \end{aligned}$$



~~ϕ~~ ~~ϕ~~

DEF. 1 DATO $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ DIREMO CHE

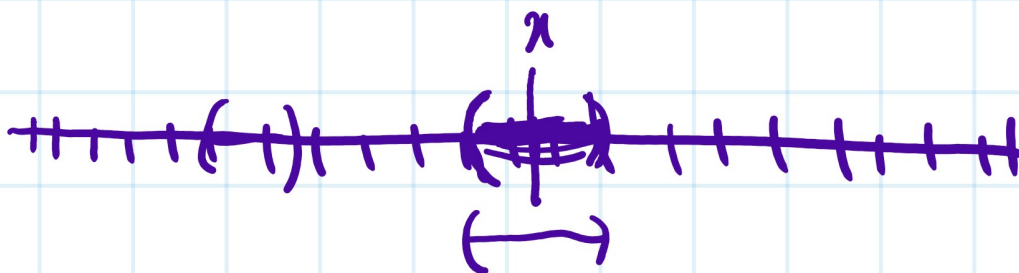
- 1) x È INTERNO AD A SE $\exists I$ INTORNO DI x
T.C. $I \subset A$.
- 2) x È ESTERNO AD A SE $\exists I$ INTORNO DI x
T.C. $I \cap A = \emptyset$
- 3) x È DI FRONTIERA PER A SE $\forall I$ INTORNO
DI x $I \cap A \neq \emptyset$
 $I \cap A' \neq \emptyset$ $I \cap A \neq I$
- 4) x È DI ACC. PER A SE $\forall I$ INTORNO DI x HA

$$\Rightarrow I \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$$

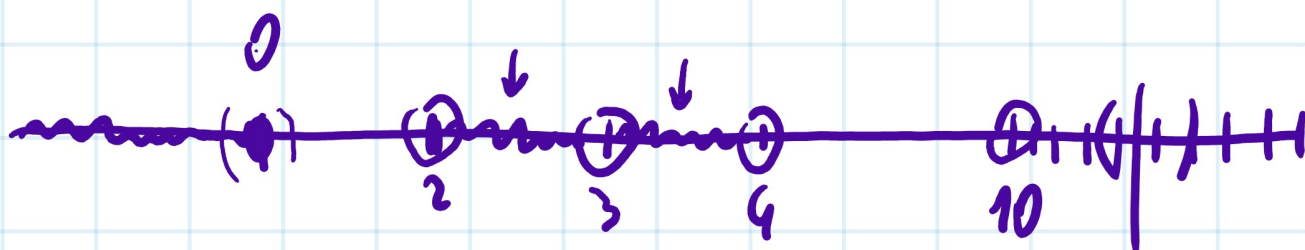
$\dot{A}$ = PARTE INTERNA

DI A FRONT.

$$\Rightarrow I \cap A \text{ HA INFINITI PUNTI}$$



$$1) A = (-\infty, 0] \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \underbrace{(\mathbb{Q} \cap (10, +\infty))}$$



$$\overset{\circ}{A} = (-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$$

$$\mathcal{D}A = \{0\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup [10, +\infty)$$

②

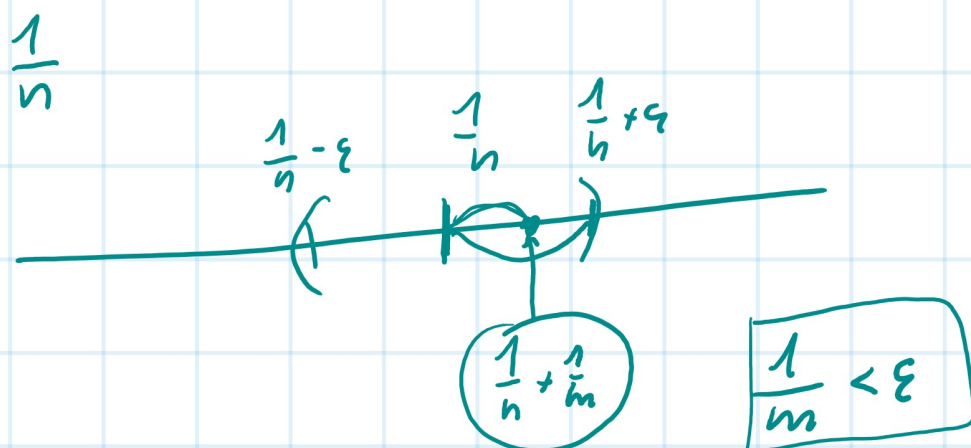
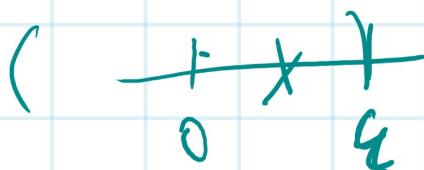
$$A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \geq 1 \right\}$$

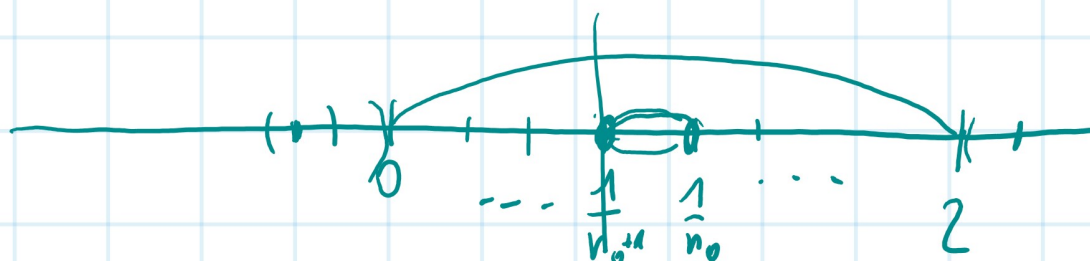
$$\downarrow$$

$$DA = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ PRENDO } n, m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$$





$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } DA \cap \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) = \emptyset$$

$$A_n = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \mid k \geq n \right\} \quad \max(A_n) = \frac{2}{n}$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

$$n \text{ l.c. } \frac{2}{n} \leq \frac{1}{n_0+1}$$

$$n \geq 2(n_0+1)$$

$$\left(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right)$$

$$DA = \underbrace{DA_1 \cup DA_2 \cup DA_3 \cup \dots \cup DA_n}_{\frac{1}{n}}$$