

Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome:

A.A. 2023-2024

Nome:

Scritto del 26/08/2024

1. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ poniamo $B_n = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos nx = 1\}$ dopodiché definiamo $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.
 Determinare parte interna e frontiera di B_{100} e di B .

2. Confrontare gli ordini di infinito delle seguenti successioni:

$$a_n = 2^n \quad b_n = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \quad c_n = n^8 \quad d_n = \left(1 + \sqrt[n]{9}\right)^n.$$

3. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}$.

4. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ siano $A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid (x+2)^2 - 3 = \arctan nx\}$ e $\alpha_n = \sup A_n$. Determinare:
 (a) il numero di elementi di A_1 ;
 (b) il numero di elementi di A_{10} ;
 (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$, (facoltativo).

5. Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ una funzione continua tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+2)}{f(x)} = 2$.

(a) Mostrare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+4)}{f(x)} = 4$.

(b) Mostrare che f ha minimo assoluto.

(c) È vero che necessariamente si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \sqrt{2}$? (facoltativo)