Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: ....   **A.A. 2023-2024**

Nome: ....   **I Esonero (17/11/2023)**

---

1. Determinare (se esistono) $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ e $\max A$, dove $A = \left\{ \dfrac{n}{1000+n^2} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}$.

2. Esibire una successione (a_n) a valori in $\mathbf{R}$ e non convergente, che inoltre abbia la seguente proprietà: *definitivamente in n, per ogni $\epsilon > 0$, si ha* $||a_n| - 1| < \epsilon$.

3. Confrontare l'ordine di infinito delle seguenti successioni:

$$a_n = n^{(n!)^2} \qquad b_n = 2^{n^{2n+1}} \qquad c_n = e^{n^{2n}} \qquad A_n = \left(1 + \frac{1}{n+(-1)^n}\right)^{n^{2n+1}}$$

4. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x f(x)}{\left((\cos x)^{\sin x} - 1\right) \cdot \sin(\sin x)}$$

prima con $f(x) = \tan x - \sin x$, poi con $f(x) = \tan x - \sin(x + x^{2023})$.

5. Mostrare che l'equazione $x^{2023} = 3e^{-\frac{1}{x}}$ ha almeno 2 soluzioni positive: una minore di 1 e l'altra maggiore.

6. Data $f(x) = \sin x + \sin \pi x$, definita per ogni x reale, dire se ammettono massimo e/o minimo (su tutto $\mathbf{R}$) le funzioni $G(x) = \dfrac{f(x)}{1+x^2}$, e $H(x) = (f(x)+3)\cdot x^2$. Infine (facoltativo) dire se ha massimo o minimo la funzione $f(x)$.

Soluzioni

1. La risposta corretta è: $\sup A = \max A = \frac{4}{253}$, $\inf A = 0$, $\min A$ non esiste.
Per comodità di calcolo conviene osservare che

$$\frac{n}{1000+n^2} = \frac{1}{\dfrac{1000+n^2}{n}} = \frac{1}{\dfrac{1000}{n}+n} = \frac{1}{a_n}$$

dove ovviamente si è posto

$$a_n = \frac{1000}{n} + n.$$

Otteniamo così che

$$A = \left\{ \frac{1}{a_n} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\} \right\}.$$

Si noti che la relazione $a_{n+1} > a_n$, ovvero

$$\frac{1000}{n+1} + n + 1 > \frac{1000}{n} + n,$$

equivale a

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{1000}$$

che, per $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, è verificata quando $n \geq 32$ mentre invece, se $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 30, 31\}$, vale la disuguaglianza opposta

$$\frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{1000},$$

cioè $a_{n+1} < a_n$.
Poiché tutti gli a_n sono positivi, passando ai reciproci le disuguaglianze si invertono:

$$\frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{a_n} \qquad \text{per } 1 \leq n \leq 31,$$
$$\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} \qquad \text{per } n \geq 32.$$

Si noti inoltre che per $n \to +\infty$ si ha $a_n > n \to +\infty$ e quindi $\frac{1}{a_n} \to 0$.
Di conseguenza $\frac{1}{a_n}$ parte dal valore $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{1001}$ e cresce fino a raggiungere il massimo per $n = 32$, poi decresce e tende a zero.
Questo significa che $\sup A = \max A = a_{32} = \frac{4}{253}$ mentre $\inf A = 0$ e $\min A$ non esiste.

2. Una successione che va bene è $a_n = (-1)^n$.
Infatti, dire che *per ogni* $\epsilon > 0$*, si ha* $||a_n| - 1| < \epsilon$, equivale ad affermare che $||a_n| - 1| = 0$, cioè che $a_n = \pm 1$.
Quindi cerchiamo una successione (a_n) non convergente tale che definitivamente in n si abbia $a_n = \pm 1$.
Per esempio possiamo prendere $a_n = (-1)^n$.

3. La risposta corretta è: $a_n = o(c_n)$, $c_n = o(b_n)$, $a_n = o(A_n)$, $A_n = o(b_n)$ ma A_n e c_n non sono confrontabili.
Osserviamo che

$$A_n = \left(1 + \frac{1}{n + (-1)^n}\right)^{n^{2n+1}} = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^{2n+1}} \stackrel{\text{def}}{=} P_n & \text{per } n \text{ pari,} \\ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n^{2n+1}} \stackrel{\text{def}}{=} D_n & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Per rispondere completamente al quesito basterà mostrare che vale il seguente ordinamento tra infiniti

$$a_n \ll P_n \ll c_n \ll D_n \ll b_n.$$

In particolare, il fatto che A_n coincida con P_n quando n è pari e con D_n quando n è dispari, rende A_n e c_n non confrontabili.
Per cominciare mostriamo che $a_n = o(P_n)$.
Ricordiamo che $n! < n^{n-1}$ in quanto

$$\frac{n!}{n^{n-1}} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2}^{n-1} \cdot 1}{\underbrace{n \ \cdot \ n \ \cdot \ldots\ldots \cdot n \cdot n}_{n-1}} < 1.$$

Di conseguenza

$$0 < \frac{a_n}{P_n} = \frac{n^{(n!)^2}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^{2n+1}}} < \frac{n^{n^{2n-2}}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^{2n+1}}} =$$

$$= \left(\frac{n}{\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n\right)^{n^2}}\right)^{n^{2n-2}} < \left(\frac{n}{2^{n^2}}\right)^{n^{2n-2}} \to 0^{+\infty} = 0$$

e dunque, per il teorema del confronto, $\frac{a_n}{P_n} \to 0$ ovvero $a_n = o(P_n)$.
Mostriamo che $P_n = o(c_n)$.
Ricordando che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ crescendo (e quindi è sempre minore di e) si ha

$$0 < \frac{P_n}{c_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^{2n+1}}}{e^{n^{2n}}} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^{2n+1}}}{\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{n^{2n}}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n^{2n+1}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n^{2n+1}} = \left(\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2}\right)^{\frac{n^{2n-1}}{(n+1)^2}} \to \left(\frac{1}{e}\right)^{+\infty} = 0$$

quindi dal teorema del confronto segue che $\frac{P_n}{c_n} \to 0$, cioè $P_n = o(c_n)$.
Mostriamo che $c_n = o(D_n)$.
Ricordando che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e$ decrescendo (e quindi è sempre maggiore di e) si ha

$$(1) \qquad 0 < \frac{c_n}{D_n} = \frac{e^{n^{2n}}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n^{2n+1}}} < \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)^{n^{2n}}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n^{2n+1}}} = \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}\right)^{n^{2n}}.$$

Inoltre

$$(2)\qquad \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n-1}\right)^{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} < \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n^2-1}} = 1-\frac{1}{n^3+n^2-n}$$

dove nel penultimo passaggio di (2) abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Bernoulli.
A questo punto, grazie alla (2), la (1) diventa

$$0 < \frac{c_n}{D_n} < \ldots < \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}\right)^{n^{2n}} < \left(1-\frac{1}{n^3+n^2-n}\right)^{n^{2n}} =$$
$$= \left(\left(1-\frac{1}{n^3+n^2-n}\right)^{n^3+n^2-n}\right)^{\frac{n^{2n}}{x^3+n^2-n}} \to \left(\frac{1}{e}\right)^{+\infty} = 0.$$

e perciò applicando il teorema del confronto si ottiene $\frac{c_n}{D_n} \to 0$, cioè $c_n = o\left(D_n\right)$
Infine mostriamo che $D_n = o\left(b_n\right)$:

$$\frac{D_n}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n^{2n+1}}}{2^{n^{2n+1}}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{2}\right)^{n^{2n+1}} \to \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$$

4. La risposta corretta è -1 in entrambi i casi.
Per $x \to 0$ si ha:

$$\sin\left(\sin x\right) \approx \sin x \approx x$$

$$(\cos x)^{\sin x} - 1 = e^{\sin x\cdot\ln\cos x} - 1 = e^{\sin x\cdot\ln(1+(\cos x-1))} - 1 \approx$$
$$\approx (\sin x)\cdot\ln\left(1+(\cos x-1)\right) \approx (\sin x)\cdot(\cos x-1) \approx x\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^3}{2}$$

$$\tan x - \sin x \approx \frac{x^3}{2}$$

$$\begin{aligned}\tan x - \sin\left(x+x^{2023}\right) &= \tan x - \sin x + \sin x - \sin\left(x+x^{2023}\right) = \\ &= \tan x - \sin x + \sin x - \sin x\cos x^{2023} - \cos x \sin x^{2023} = \\ &= (\tan x - \sin x) + \left(1-\cos x^{2023}\right)\sin x - \cos x\sin x^{2023} = \\ &= \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) + \left(\frac{x^{4046}}{2} + o\left(x^{4046}\right)\right)\cdot\left(x+o\left(x\right)\right) - \\ &\qquad - \left(1+o\left(1\right)\right)\cdot\left(x^{2023}+o\left(x^{2023}\right)\right) = \\ &= \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) + o\left(x^{4045}\right)\cdot o\left(1\right) - \left(1+o\left(1\right)\right)\cdot o\left(x^{2022}\right) = \\ &= \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) + o\left(x^{4045}\right) - o\left(x^{2022}\right) = \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) \approx \frac{x^3}{2}\end{aligned}$$

Quindi in estrambi i casi si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{\left((\cos x)^{\sin x}-1\right)\cdot\sin(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^3}{2}}{-\frac{x^3}{2}\cdot x}=-1$$

5.

Per comodità indichiamo con $f(x)$ la funzione al primo membro e con $g(x)$ quella al secondo. Per $x=1$ si ha:

$$f(1)=1^{2023}=1$$
$$g(1)=3e^{-\frac{1}{1}}=\frac{3}{e}$$

e quindi $f(1)<g(1)$
D'altra parte, per $x\to+\infty$ abbiamo che:

$$f(x)=x^{2023}\to+\infty$$
$$g(x)=3e^{-\frac{1}{x}}\to 3,$$

quindi, se si prende $b>1$ sufficientemente grande, si ha $f(b)>g(b)$. Ma allora, siccome f e g sono continue su $[1,b]$, da $f(1)<g(1)$ e $f(b)>g(b)$ segue che esiste $c\in(1,b)$ tale che $f(c)=g(c)$.
Infine, per $x\to 0^+$ si ha che:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2023}}=\lim_{x\to 0^+}3\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{2023}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{y\to+\infty}3\cdot\frac{y^{2023}}{e^y}=0.$$

Di conseguenza, se x è sufficientemente piccolo, si ha $\frac{g(x)}{f(x)}<1$, posso dunque scegliere $a<1$ tale che $\frac{g(a)}{f(a)}<1$, ovvero $g(a)<f(a)$.
A questo punto, dalla continuità di f e g su $[a,1]$ e da $f(1)<g(1)$ e $f(a)>g(a)$ segue che esiste $c'\in(a,1)$ tale che $f(c')=g(c')$.
Abbiamo quindi trovato due soluzioni c e c' dell'equazione $f(x)=g(x)$ tali che $0<c'<1<c<+\infty$.

6.

Osserviamo che $f(x)$, $G(x)$ ed $H(x)$ sono tutte continue grazie ai teoremi sulle operazioni tra funzioni continue.
Per cominciare mostriamo che $G(x)$ ha massimo su tutto $\mathbf{R}$.
Preso $x_0=\frac{1}{2}$, poniamo

$$\lambda=G(x_0)=\frac{4}{5}\left(\sin\frac{1}{2}+1\right)>0.$$

Siccome $G(x)\to 0$ per $x\to\pm\infty$, è possibile trovare $a>0$ tale che per $|x|>a$ si abbia $g(x)<\lambda$. In particolare quindi $x_0\in[-a,a]$. Ma sul compatto $[-a,a]$ $G(x)$ ha certamente un massimo M, grazie al teorema di Weierstrass, che è maggiore o uguale a λ (visto che $x_0\in[-a,a]$) e quindi è il massimo su tutto $\mathbf{R}$, visto che fuori da $[-a,a]$ si ha $G(x)<\lambda$.
La dimostrazione che $G(x)$ ha minimo su $\mathbf{R}$ è del tutto analoga: dopo aver preso $x'=-\frac{1}{2}$, si ha $G(x')=\mu<0$ e, sfruttando il fatto che $G(x)\to 0$ per $x\to\pm\infty$, si trova $b>0$ tale che

$g(x) < \lambda$ fuori da $[-b, b]$. In tal modo, il minimo di $G(x)$ su $[-b, b]$, che esiste grazie al teorema di Weierstrass, è in realtà il minimo su tutto $\mathbf{R}$.
Allo stesso modo si dimostra anche che $H(x)$ ha minimo su tutto $\mathbf{R}$: sfruttando il fatto che $H(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$ si ritaglia un compatto $K = [-a, a]$ tale che il minimo su K, che ci è garantito dal teorema di Weierstrass, è in realtà il minimo su tutto $\mathbf{R}$.
Invece $H(x)$ non ha massimo su $\mathbf{R}$ visto che $H(x) \to +\infty$ per $x \to \infty$.
Il caso di $f(x)$ è più complicato.
Per prima cosa si osserva che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $-2 < f(x) < 2$.
Questa è la parte semplice: ad esempio, per mostrare che $f(x) < 2$ basta osservare che per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia $\sin x$ che $\sin \pi x$ sono minori o uguali a 1, ma non assumono mai valore 1 simultaneamente perché altrimenti gli insiemi A e B definiti da:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = 1\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$$
$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin \pi x = 1\} = \left\{\frac{1}{2} + 2k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$$

dovrebbero intersecarsi, cioè dovrebbero esistere $m, n \in \mathbf{Z}$ tali che

$$\frac{\pi}{2} + 2m\pi = \frac{1}{2} + 2n$$

da cui seguirebbe

$$\pi = \frac{1 + 4n}{1 + 4m} \in \mathbf{Q}.$$

in contrasto con l'irrazionalità di π.
In modo del tutto analogo si dimostra che $f(x) > -2$.
Per concludere che $f(x)$ non ha né massimo né minimo su $\mathbf{R}$ dobbiamo ora dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esistono valori di $f(x)$ che distano da 2 (o da -2) meno di ϵ.
Per farlo basta dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $x \in A$ e $y \in B$ tali che $|y - x| < \epsilon$ perché in tal caso si ha:

$$\begin{aligned} f(y) &= \sin \pi y + \sin y = \sin \pi y + \sin(x + (y - x)) = \\ &= \sin \pi y + \sin x \cos(y - x) + \cos x \sin(y - x) = 1 + \cos(y - x) > 1 + \cos \epsilon \end{aligned}$$

che tende a 2 per $\epsilon \to 0$.
Concludiamo dunque dimostrando che, pur essendo A e B disgiunti, si possono scegliere $x \in A$ e $y \in B$ in modo che $|x - y|$ sia arbitrariamente piccolo.
A tale scopo osserviamo che 2π e $2n$ hanno rapporto irrazionale quindi, grazie ad un risultato dimostrato a esercitazione, sappiamo che l'insieme Γ di tutte le loro combinazioni lineari a coefficienti interi è denso in $\mathbf{R}$.
Di conseguenza è denso in $\mathbf{R}$ anche l'insieme che si ottiene traslando Γ di $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$.
Questo significa che per quanto sia piccolo $\epsilon > 0$ esiste sempre un elemento di Γ traslato che sta tra 0 e ϵ, ovvero esistono $m, n \in \mathbf{Z}$ tali che

$$0 < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + m \cdot 2\pi + n \cdot 2 < \epsilon$$

cioè

$$0 < \left(\frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi\right) - \left(\frac{1}{2} - n \cdot 2\right) < \epsilon$$

Per avere la tesi basta ora osservare che $x = \left(\frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi\right) \in A$ e $y = \left(\frac{1}{2} - n \cdot 2\right) \in B$.