Analisi Matematica 1 - docente: Callegari - codocente: Ghezzi

V Prova simulata di primo esonero

1 SI CONSIDERI UNA SUCCESSIONE $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ DI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$. A PARTIRE DA ESSA DEFINIAMO I 2 INSIEMI

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right) \qquad C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right)$$

a MOSTRARE CHE, COMUNQUE SIA FATTA LA SUCCESSIONE DI INSIEMI A_i, VALE SEMPRE L'INCLUSIONE $B \subset C$

b ESIBIRE UNA SUCCESSIONE DI INSIEMI A_i PER LA QUALE $C \not\subset B$.

2 CALCOLARE $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-n-6}{n^2-n+2} \right)^{\frac{n^4+n+3}{n^3-1}}$

3 CALCOLARE $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n}}$

4 MOSTRARE CHE L'EQUAZIONE $\left(1+\sin^4 x + \cos^4 x\right) 3^{x+1} = 2^x + 4^x$ HA ALMENO 2 SOLUZIONI DELLE QUALI UNA È POSITIVA E L'ALTRA NEGATIVA.

5 SIA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA. MOSTRARE CHE L'INSIEME $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ È SEMPRE CHIUSO.

6 A PARTIRE DA UNA FUNZIONE $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA POSSIAMO SEMPRE DEFINIRE UNA FUNZIONE $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA

$$g(x) = \sup \{ f(t) \mid a \leq t \leq x \}.$$

MOSTRARE CHE g È CONTINUA.