Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... A.A. 2023-2024

Nome: .... Simula 2 per II Esonero

---

1. Studiare la continuità uniforme e la Lipschitzianità della funzione $f(x) = \ln\left(2 + x^2 + \sin x^4\right)$ sugli insiemi $A = (-2, 2)$ e $B = (-2, +\infty)$.

2. Calcolare $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - \frac{2}{\cos x} - \frac{x^2}{3} \cdot \ln\left(1 - x^2\right) + x\left(\tan x^2 - \sin x^2\right)}{e^{x^7} - \cos x^4}$

3. Risolvere la disequazione $e^{x^2} \leq 1 + \arctan x^2$ ricorrendo, se necessario, ad uno studio di funzione.

4. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite di (a_n) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f\left(a_n\right) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $f(x) = x + \frac{\pi}{4} - \arctan x$.

5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile e siano (a_n) e (b_n) due successioni a valori in $\mathbf{R}$. dire se sono vere o false le affermazioni che seguono, dimostrandole se vere ed esibendo un controesempio se false.

(**a**) Se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to 0$ allora $\dfrac{f\left(a_n\right) - f\left(-a_n\right)}{2a_n} \to f'(0)$.

(**b**) Se $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $a_n \to 0$ allora $\dfrac{f\left(2a_n\right) - f\left(a_n\right)}{a_n} \to f'(0)$.

(**c**) Se $a_n \neq b_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $a_n \to x_0$ e $b_n \to x_0$ allora $\dfrac{f\left(b_n\right) - f\left(a_n\right)}{b_n - a_n} \to f'\left(x_0\right)$.

(**d**) Come **(c)** ma aggiungendo l'ipotesi che f sia di classe C^1.