Università di Roma "Tor Vergata" - CdL Matematica

Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... A.A. 2023-2024

Nome: .... Simula 3 per II Esonero

---

1. Studiare la continuità uniforme e la Lipschitzianità della funzione $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}\sin x}$ sugli insiemi $A=(0,1]$, $B=[1,2]$ e $C=[2,+\infty)$.

2. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n\cdot\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{2}{n}-3\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)\cdot\sqrt[3]{1-\frac{13}{n^2}}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{2n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{2n^3}}-2\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}+\ln\left(1+n^n\right)}$$

3. Mostrare che se $\epsilon>0$ è sufficientemente piccolo allora l'equazione $\sqrt[4]{1+x^4+\epsilon x^{10}}=1+\frac{x^2}{4}$ ha almeno 7 soluzioni.

4. Determinare il limite (oppure il massimo limite e il minimo limite, se il limite non esiste) di (a_n) definita per ricorrenza da
$$\begin{cases} a_{n+1}=f\left(a_n\right) \\ a_0=\alpha \end{cases}$$
con $f(x)=x-x^3$ nei seguenti casi: $\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=\sqrt{2}$ e $\alpha=2$.
Inoltre nel caso $\alpha=\frac{1}{2}$ stimare l'ordine di infinitesimo di (a_n). (facoltativo)
Dire infine quanti sono i valori di α per i quali (a_n) risulta definitivamente nulla. (facoltativo)

5. Mostrare che non può essere uniformemente continua una funzione $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ con la seguente proprietà: *esiste $\delta>0$ tale che per ogni $M>0$ esistono $x,y\in\mathbf{R}$ tali che $|x-y|<\delta$ ma $|f(x)-f(y)|>M$.*