Università di Roma "Tor Vergata" - CdL Matematica

Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... A.A. 2023-2024

Nome: .... Simula 4 per II Esonero

---

1. Studiare la continuità uniforme e la Lipschitzianità della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sin x + \sin \pi x}$ sugli insiemi $A = (0, 1]$, $B = [1, 2]$ e $C = [2, +\infty)$.

2. Verificare che la funzione $f(x) = \cos\left(\left(x^2 + x^3\right) - \sin\left(x^2 + x^3\right)\right) - e^{x^2 - \sin x^2}$ ha per $x = 0$ un punto stazionario e studiarne la natura. Calcolare inoltre $f^{(10)}(0)$.

3. Dire quante sono le soluzioni dell'equazione $1 + \log_2\left(1 + x^2\right) = 2\sqrt{x}$.

4. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite di
Sia (a_n) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

con $f(x) = 2|x - 2|$ e $\alpha \in \mathbf{R}$.
Determinare l'insieme A di tutti gli $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la (a_n) definita da (1) soddisfa $a_n \to +\infty$.
Detto B il complementare di A, mostrare che per ogni $x, y \in B$ e per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\alpha \in \mathbf{R}$ ed $n_0 \in \mathbf{N}$ tali che $|\alpha - x| < \epsilon$ e inoltre la (a_n) definita da (1) soddisfa $a_{n_0} = y$. (facoltativo)

5. Trovare $f : C^\infty(\mathbf{R})$ che sia strettamente positiva sull'intervallo $(-1, 1)$ e nulla per $|x| \geq 1$.