Analisi Matematica 1

docente: Callegari - codocente: Ghezzi

Cognome: .... A.A. 2023-2024

Nome: .... Simula 5 per II Esonero

---

1. Studiare la continuità uniforme e la Lipschitzianità della funzione $f(x) = \sqrt{x + x^4} \cdot \sin \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ sugli insiemi $A = (0, 1]$, $B = [1, 2]$ e $C = [2, +\infty)$.

2. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-3\sqrt{2}\sin\left(x\sqrt{2}\right) + 6\arctan x - \sqrt[7]{1 - 5x^7} + e^{\frac{4}{5}x^7} + \left(\ln(1 - x) + \ln\left(1 + x + x^2\right)\right) \cdot (\tan x)^2}{x^\alpha}.$$

3. Dire quante sono le soluzioni dell'equazione $x^2 + \arctan\sqrt{x} = 10x$.

4. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il limite di (a_n) definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

con $f(x) = -\frac{x^3}{1+x^2}$.

---

scegliere e svolgere uno solo dei quesiti al di sotto di questa linea (quesiti teorici)

---

5. Data $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ sia $\phi : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definita da $\phi(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$. Dire se sono vere o false le affermazioni che seguono, dimostrandole se vere ed esibendo un controesempio se false.

(**a**) Se f è strettamente convessa allora ϕ è strettamente crescente.

(**b**) Se ϕ è strettamente crescente allora f è strettamente convessa.

6. Determinare $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ strettamente convesse tali che l'insieme di tutte e sole le soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$ sia esattamente $\mathbf{Z}$.

7. Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ strettamente convessa e derivabile, mostrare che f' è necessariamente continua.